DERIVATE(*V°A, V°B*)

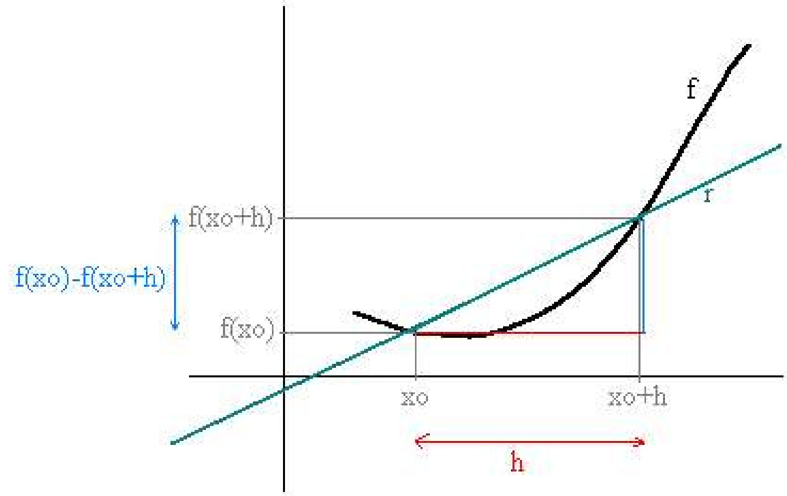
Il concetto di *derivata* è strettamente legato al concetto di *tangente ad una curva* in un dato punto.

Sia f una funzione definita su di un intervallo aperto (a, b) a valori reali e sia e sia x_0 un punto di (a, b). Sia h un numero reale e sia h un numero reale tale che x_0+h appartenga all'intervallo (a,b).

Si dice allora *rapporto incrementale di f* in x_0 relativo all'incremento h il quoziente

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Geometricamente, tale rapporto corrisponde al rapporto tra le misure dei due segmenti indicati in blu e in rosso nella seguente figura:



Osservando la figura, e ricordando la definizione *coefficiente direttivo di una retta*, possiamo osservare che tale rapporto incrementale corrisponde al coefficiente direttivo della retta r indicata nella figura, che passa per i punti del grafico della funzione aventi coordinate (x_0,f(x_0)) e (x_0+h,f(x_0+h)).

Supponiamo che esista finito il seguente limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=d$$

In tal caso si dice che f è derivabile in x_0 e che la derivata di f nel punto x_0 è d. In simboli scriviamo:

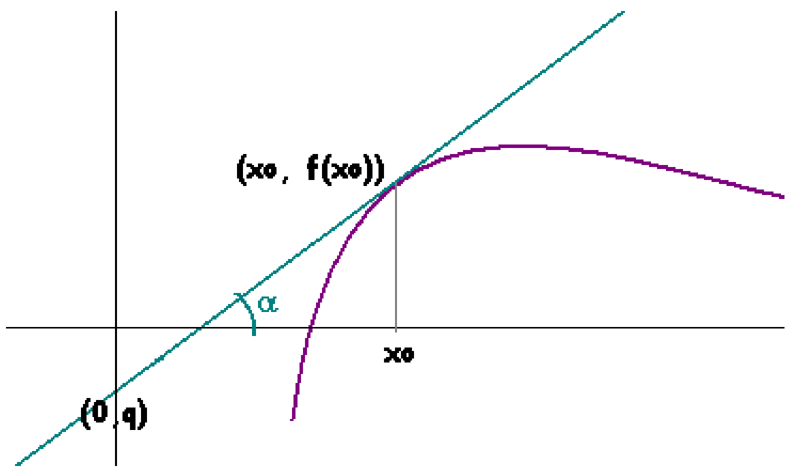
$$f'(x_0)=d$$

Interpretazione geometrica del concetto di derivata

Sia x_0 un punto di un intervallo (a,b) Come il rapporto incrementale in x_0 relativo all'incremento h era il *coefficiente direttivo* della retta che congiungeva i punti di coordinate $(x_0,f(x_0))$ e $(x_0+h,f(x_0+h))$, così il limite di tale rapporto incrementale, per h tendente a 0, sarà il *coefficiente direttivo* della retta tangente al grafico della funzione in $(x_0,f(x_0))$.

Per scrivere l'equazione di tale retta abbiamo bisogno di conoscere le seguenti informazioni:

- avere informazioni sull'angolo che la retta forma una retta assegnata, ad esempio con l'asse delle x;
- avere le coordinate di un punto appartenente alla retta.



Nel nostro caso:

- abbiamo informazioni sull'angolo che la tangente forma con l'asse delle x, in quanto conosciamo la tangente trigonometrica di tale angolo: essa è la derivata $f'(x_0)$
- sappiamo che la retta, dovendo essere tangente al grafico nel punto $(x_0,f(x_0))$, dovrà in particolare passare per questo punto.

Nella generica equazione esplicita

$$y=mx+q$$

di una retta **non** parallela all'asse y sostituiamo quindi i dati che conosciamo:

- Il coefficiente direttivo di tale retta è $f'(x_0)$ => l'equazione della retta è del tipo **"$y=f'(x_0)x+q$"**
- La retta passa per il punto $P=(x_0,f(x_0))$ => Le coordinate di $P= (x_0,f(x_0))$ dovranno soddisfare l'equazione "$y= f'(x_0)x+q$"

scriviamo dunque:

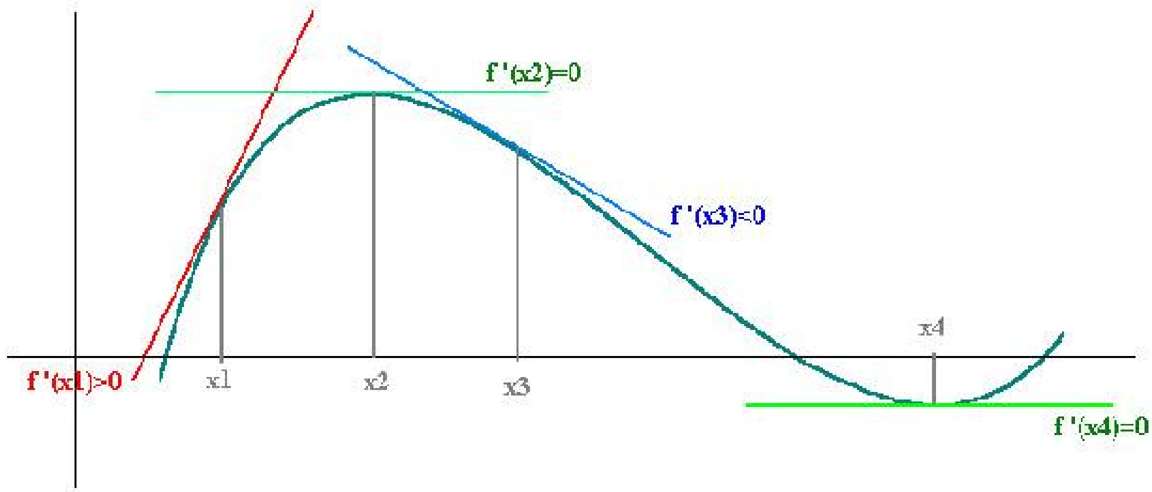
$$f(x_0)=f'(x_0)\,x_0+q$$

e determiniamo il valore di q: si avrà $q=f(x_0)-f'(x_0)\,x_0$.

L'equazione della retta tangente al grafico sarà dunque "$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)\,x_0$" cioè

$$\mathbf{y=f(x_0) + f'(x_0)\,(x- x_0)}$$

A seconda che la derivata in x_0, sia nulla, negativa o positiva, la retta tangente al grafico in $(x_0,f(x_0))$ avrà la posizione indicata in figura:



(a questo proposito si veda anche la definizione di *coefficiente direttivo* di una retta)

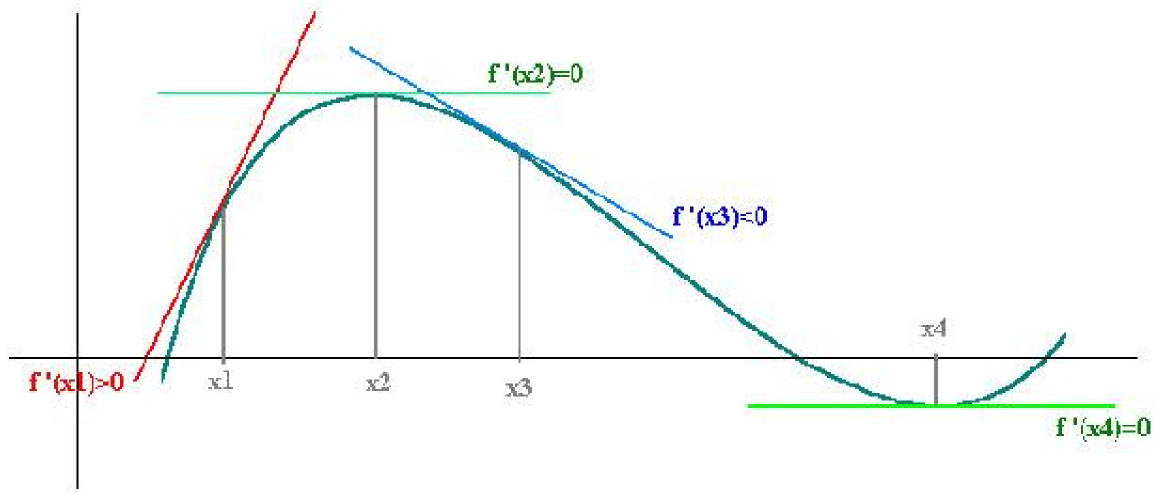
Derivata in un punto e Funzione Derivata

Abbiamo visto che per derivata di una funzione in un punto x_0 si intende il limite del rapporto incrementale di f in x_0:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=d$$

e avevamo visto che, geometricamente, essa rappresenta il coefficiente direttivo della retta tangente al grafico nel punto

Sia D il dominio di definizione della funzione: supponiamo di *"far scorrere"* (dove possibile.....) la tangente lungo la curva che rappresenta il grafico della funzione:



Come si può notare, nei punti x dove esiste la tangente al grafico della funzione, è possibile associare un'informazione riguardante la retta tangente al grafico nel punto corrispondente $P=(x_0,f(x_0))$. Consideriamo quindi la mappa:

$$f': x_0 \rightarrow \text{coeff. dir. tang. al grafico in } P=(x_0,f(x_0))$$

Tale mappa sarà definita soltanto per quei valori per i quali la tangente al grafico in P esiste.

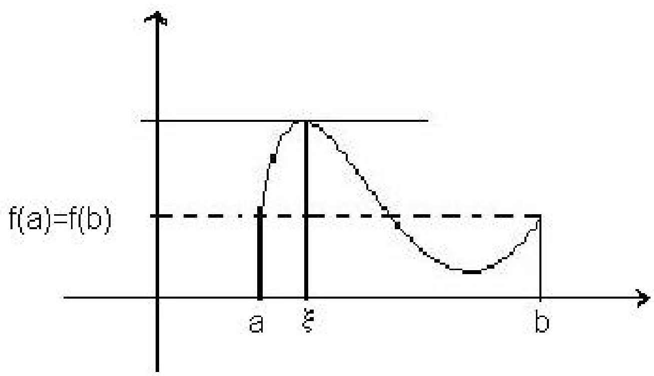
Ricordando quindi che tale coefficiente direttivo di tale retta è la derivata della funzione in x_0, la mappa ora definita sarà quella che associa ad ogni punto la sua derivata. Tale mappa è detta ***"funzione derivata"*** della funzione f.

I principali Teoremi del Calcolo Differenziale

Argomenti:

[1] Teorema di Rolle

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] e derivabile in (a, b) tale che f(a)=f(b). Allora esiste ξ in (a, b) tale che f ' (ξ)=0



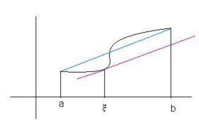
Interpretazione geometrica: Sotto le opportune ipotesi di continuità e di derivabilità che sono state enunciate, se f(a)=f(b), allora esiste ξ in (a, b) tale che la tangente al grafico nel punto di coordinate (ξ , f(ξ)) sia orizzontale.

---

[2] Teorema di Lagrange

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] e derivabile in (a, b). Allora esiste ξ in (a, b) tale che

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

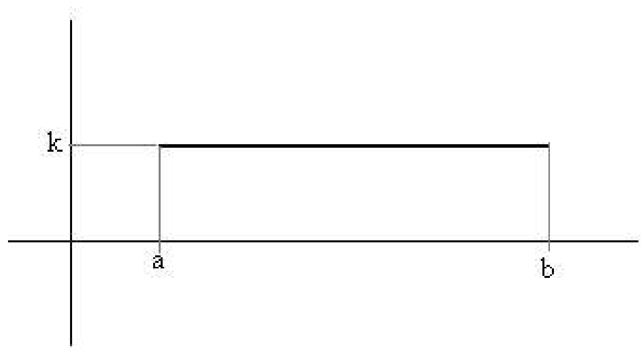


Interpretazione geometrica: Sotto le opportune ipotesi di continuità e di derivabilità che sono state enunciate, esiste ξ in (a, b) tale che la tangente al grafico nel punto di coordinate (ξ , f(ξ)) sia parallela alla retta che congiunge i punti di coordinate (a, f(a)) e (b, f(b)).

N.B.: Il Teorema di Rolle è un caso particolare del Teorema di Lagrange nel caso in cui f(a)=f(b). Il teorema di Lagrange si dimostra riconducendosi al teorema di Rolle.

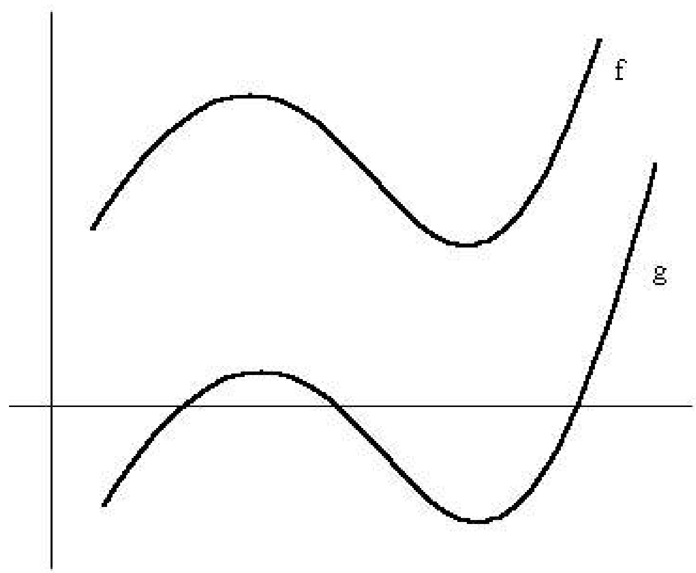
[2.1] Corollario 1

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] e derivabile in (a, b) tale che f '(x)=0 per ogni x in (a, b). Allora esiste un numero reale k tale che f(x)=k per ogni x in [a,b], cioè' f e' costante su tutto il dominio di definizione.



[2.2] Corollario 2

Siano f e g due funzioni continue in un intervallo chiuso [a, b] e derivabili in (a, b) tali che f '(x)=g'(x) per ogni x in (a, b). Allora esiste un numero reale c tale che f(x)=g(x)+c per ogni x in [a,b], cioè f e g differiscono a meno di una costante.



[2.3] Corollario 3

Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso [a, b] e derivabile in (a, b). Allora:

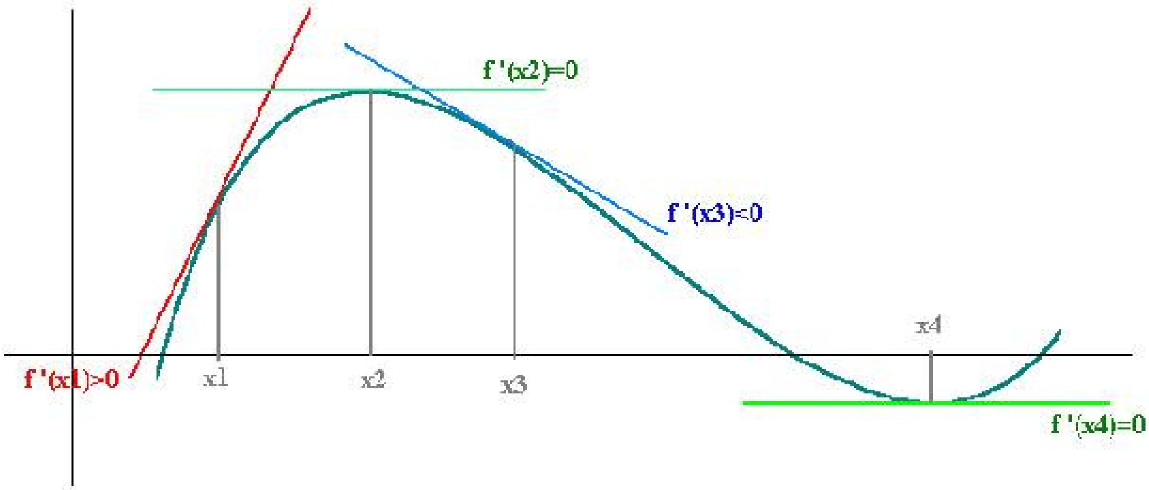
i) Se f '(x)>0 per ogni x in (a, b), allora f è crescente in [a, b].

ii) Se f '(x)<0 per ogni x in (a, b), allora f è decrescente [a, b].

Tale corollario è importantissimo ed ha un ruolo determinante nella ricerca dei punti di *estremo relativo* di una funzione.

Dal punto di vista intuitivo:

:



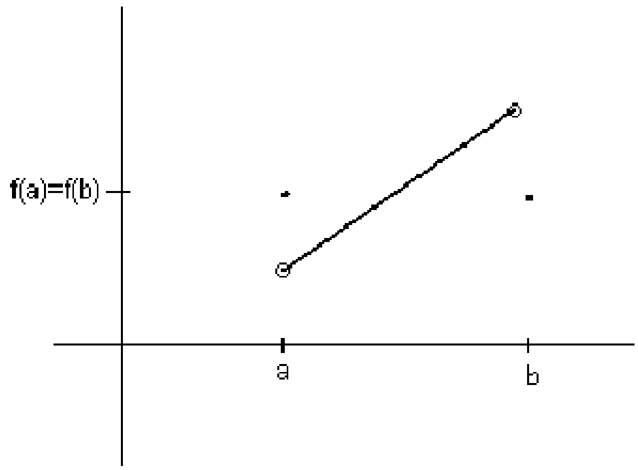
[3] Teorema di Cauchy

Siano f e g due funzioni continue in un intervallo chiuso [a, b] e derivabili in (a, b). Se g '(x)<>0 per ogni x in (a,b), allora esiste ξ in (a, b) tale che

[4] Osservazioni sui teoremi

Osservazioni sul teorema di Rolle

Osserviamo che l'ipotesi di continuità della funzione su tutto l'intervallo chiuso [a, b] è fondamentale (vai a: Teorema di Rolle). Supponiamo infatti che la funzione f sia continua e derivabile su (a, b) ma che presenti una discontinuità negli estremi a e b. In tal caso la funzione potrebbe non essere costante sull'intervallo: consideriamo ad esempio la seguente funzione:



Come si può notare, la funzione della figura, a parte la continuità negli estremi, gode di tutte le altre proprietà elencate dall'enunciato del teorema di Rolle. Come si può notare, essa non è costante.

[4.2] Osservazioni sul teorema di Lagrange

Il Teorema di Lagrange si dimostra riconducendosi al Teorema di Rolle: si consideri infatti la funzione g definita da:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Dal punto di vista geometrico, il grafico della funzione g è il grafico di f che è stato fatto ruotare di un opportuno angolo, in modo da rendere orizzontale la congiungente dei punti (a, f(a)), (b, f(b)). La funzione g verifica le ipotesi del Teorema di Rolle e dunque esiste ξ in (a, b) tale che g ' (ξ)=0, cioè esiste ξ in (a, b) tale che

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

cioè la tesi.

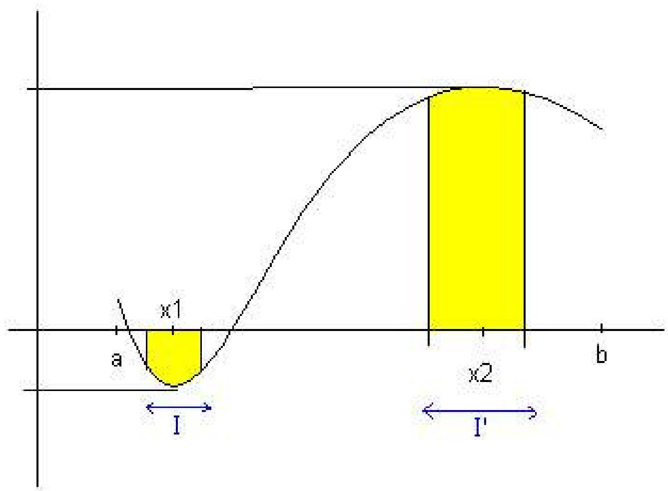
Punti di estremo relativo e assoluto

Definizioni: Sia f una funzione definita su di un insieme A contenuto in R. Allora:

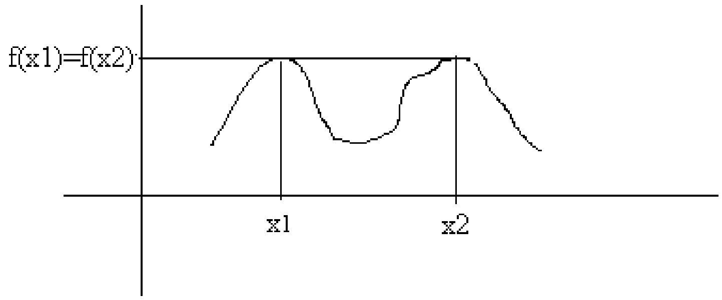
- Un punto x_0 si dice essere di **MASSIMO RELATIVO** per la funzione f se esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni x in I.
- Un punto x_0 si dice essere di **MINIMO RELATIVO** per la funzione f se esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x in I.
- Un punto x_0 si dice essere di **MASSIMO ASSOLUTO** per la funzione f se $f(x) \leq f(x_0)$ per ogni x in A.
- Un punto x_0 si dice essere di **MINIMO ASSOLUTO** per la funzione f se $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni x in A.
- Un punto x_0 si dice essere di **ESTREMO RELATIVO** (**ASSOLUTO**) per la funzione f se esso è di minimo o di massimo relativo (assoluto) per f.

Ovviamente, ogni punto di estremo assoluto, è anche punto di estremo relativo. Non è vero il viceversa.

Alcune delle situazioni descritte sono visualizzate dai seguenti grafici:



Come si può osservare dalla figura, i punti x_1 e x_2 risultano rispettivamente punto di minimo e punto di massimo relativo per la funzione f. Si osserva che essi sono anche di estremo assoluto. I punti a e b risultano essere rispettivamente di massimo e di minimo relativo per la funzione, ma non sono di estremo assoluto.
E' importante osservare che i valori d minimo o di massimo assoluto possono anche essere assunti da più punti distinti: ad esempio consideriamo la seguente funzione:



In essa i due punti distinti x_1 e x_2 risultano essere di massimo assoluto.

Teoremi

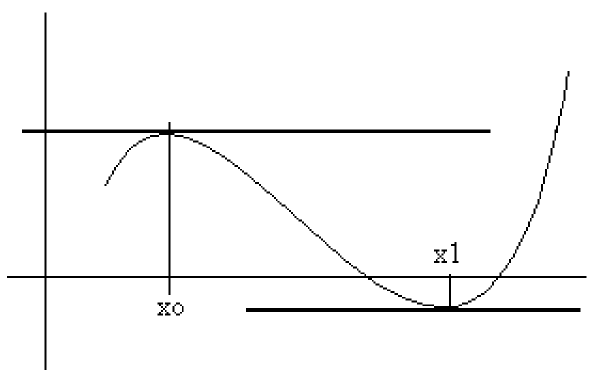
Teorema 1:

Sia f una funzione definita su di un intervallo I, e sia x_0 punto interno a I. Supponiamo inoltre che:

- se x_0 è punto di estremo relativo per f
- f è derivabile in x_0

Allora si ha $f'(x_0)=0$.

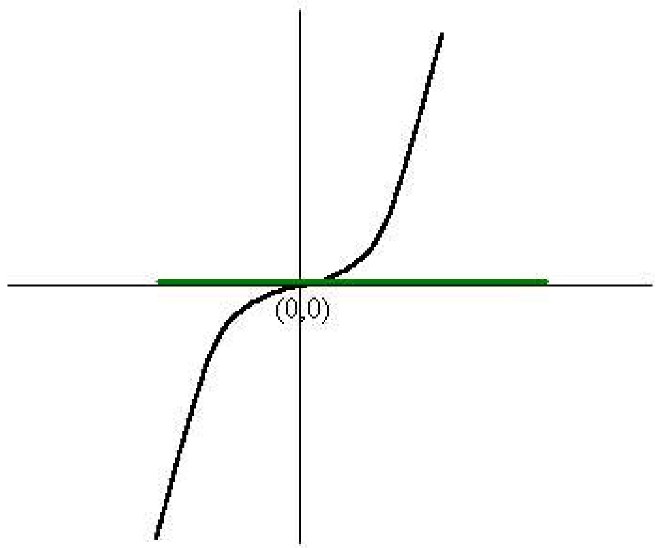
Geometricamente, il teorema si interpreta nel modo seguente:



Se il punto x_0 è un punto interno di estremo relativo e la funzione è in esso derivabile, allora la retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0 , f(x_0))$ risulta orizzontale.

ATTENZIONE!!!!!

Il teorema non si può invertire, cioè in generale non è vero "f è derivabile in x_0 $f'(x_0)=0 \Rightarrow x_0$ è un punto di estremo relativo per f".
A titolo di esempio consideriamo il caso della funzione $f(x)=x^3$. Essa ha il seguente grafico:



Come si può osservare, 0 non è punto di estremo relativo per la funzione f: a sinistra di 0, i valori di f risultano tutti negativi; al contrario a destra di 0 i valori di f risultano tutti positivi. Tuttavia la tangente alla curva nel punto (0, 0) risulta orizzontale.

Regola Pratica

Per la Determinazione dei Massimi e dei Minimi di una Funzione

Il procedimento è schematizzato qui sotto:

[0] Si deriva la funzione e si trovano gli zeri della derivata prima, cioè si ricercano quegli x tali che $f'(x)=0$

[1] Sia x_0 in {x app. a dom(f) / $f'(x)=0$}; si calcola la derivata seconda $f''(x_0)$. Si possono presentare 3 casi:

- [1.1] Se $f''(x_0)<0$, allora x_0 è di massimo relativo per f.
- [1.2] Se $f''(x_0)>0$, allora x_0 è di minimo relativo per f.
- [1.3] Se $f''(x_0)=0$, allora si calcola la derivata terza $f'''(x_0)$.

[2] Se $f'(x)=f''(x_0)=0$ e $f'''(x_0)\neq0$, allora x_0 non è né punto di minimo, né punto di massimo per f.

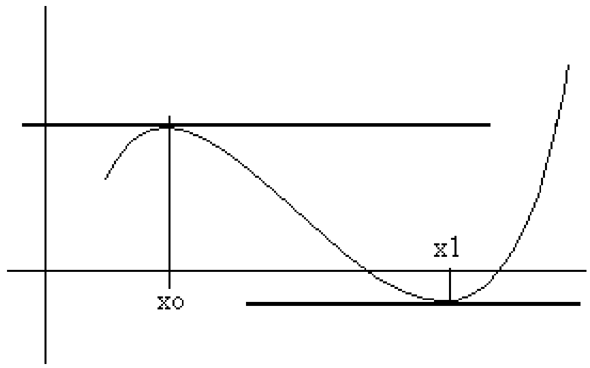
[3] Se $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, allora si calcolano le derivate successive fino a trovare quella che non si annulla in x_0.

Sia $f^{(n)}(x_0)\neq0$, la prima derivata che non si annulla in x_0:

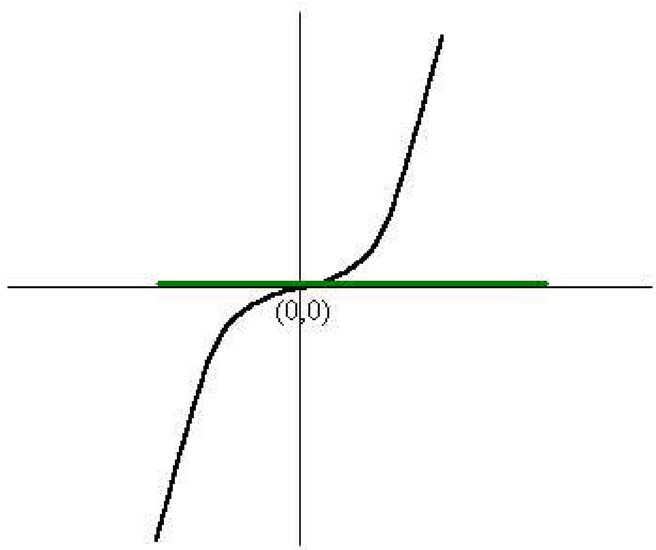
- [3.1] Se n è pari, allora x_0 è punto di estremo relativo per f; in particolare:
  - [3.1.1] Se $f^{(n)}(x_0)>0$, allora x_0 è di minimo relativo per f.
  - [3.1.2] Se $f^{(n)}(x_0)<0$, allora x_0 è di massimo relativo per f.
- [3.2] Se n è dispari, allora x_0 non è né punto di minimo, né punto di massimo per f.

[1]

La funzione è stata derivata. Sia x_0 un punto interno al dominio di f tale che $f'(x_0)=0$. La tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è dunque orizzontale.



Questo tuttavia non significa necessariamente che il punto in questione sia di estremo relativo: potrebbe infatti verificarsi un caso di questo tipo:



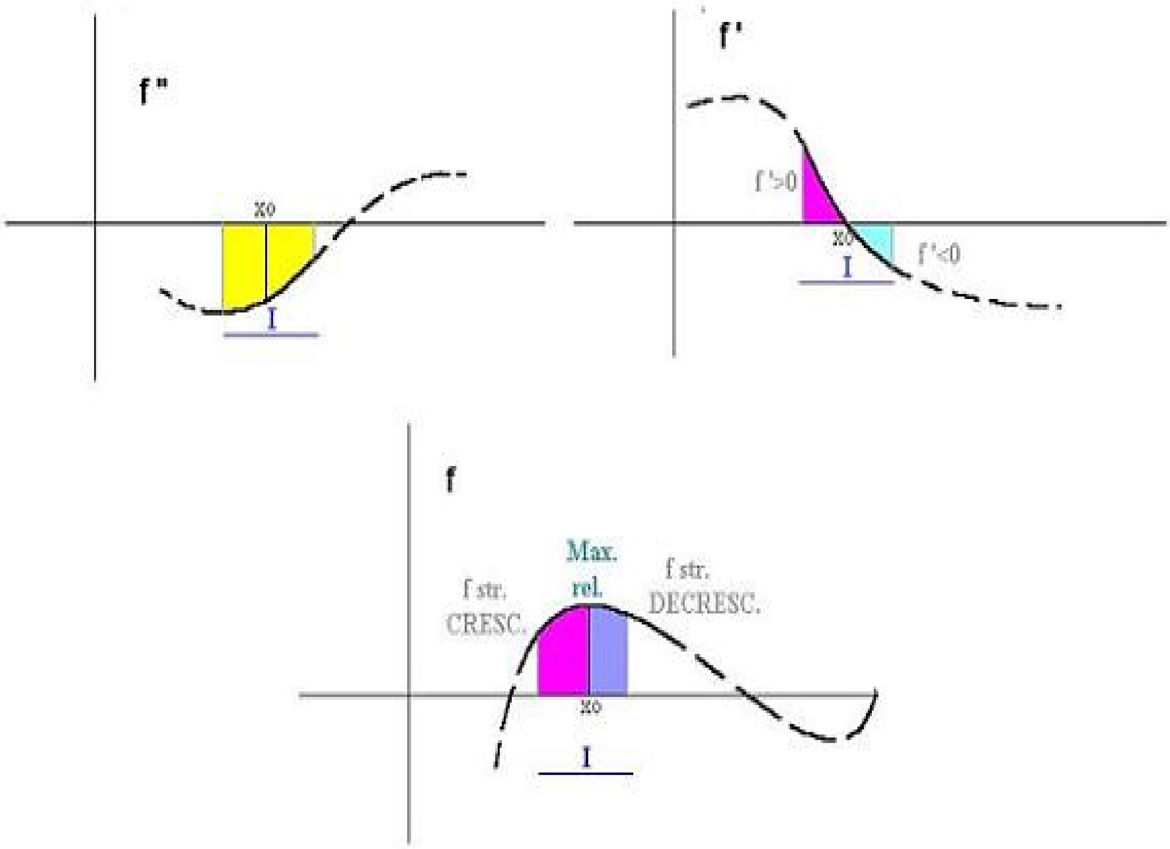
Si passa quindi al calcolo della derivata seconda $f''(x_0)$. Si presenterà uno dei 3 casi seguenti:

- $f''(x_0)<0$
- $f''(x_0)>0$
- $f''(x_0)=0$

[1.1]

Il punto x_0 è un punto interno al dominio di f tale che $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)<0$. Da tutto ciò si può concludere che

x_0 è di MASSIMO relativo per la funzione f

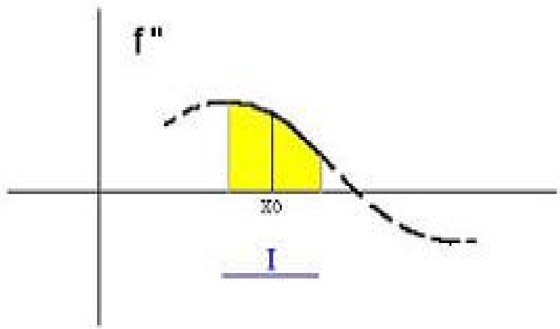


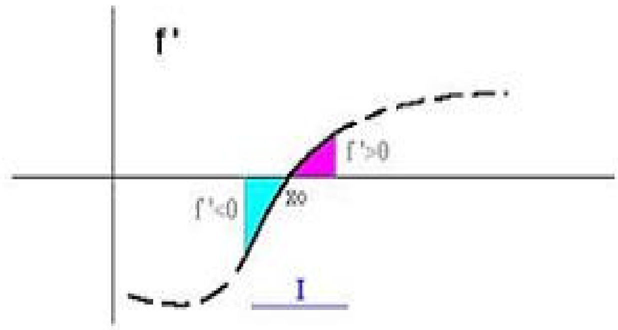
Tutto ciò si può spiegare nel modo seguente:
Siccome f "$(x_0)<0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste allora un intorno I di x_0 in cui f "$(x)<0$. In tale intorno I, per il corollario 3 al teorema di Lagrange, la funzione f ' sarà strettamente decrescente e dunque, siccome f ' si annulla in x_0, in un intorno sinistro di x_0 la funzione f ' sarà positiva, mentre in un intorno destro f ' sarà negativa.
Le ripercussioni sulla funzione f sono le seguenti: in un intorno sinistro di x_0 la f è strettamente crescente, mentre in un intorno destro la f è strettamente decrescente.
Esiste quindi un intorno di in x_0 cui $f(x)<f(x_0)$.
Il punto x_0 è dunque di massimo relativo per definizione.

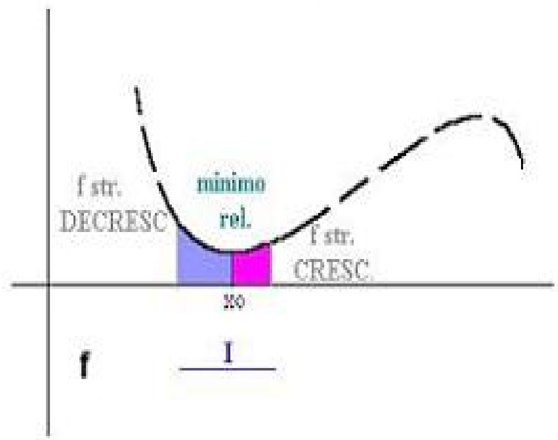
[1.2]

Il punto x_0 è un punto interno al dominio di f tale che f '$(x_0)=0$ e f "$(x_0)>0$. Da tutto ciò si può concludere che

x_0 è punto di MINIMO relativo per la funzione f







Tutto ciò si può spiegare nel modo seguente:
Siccome f ''$(x_0)>0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste allora un intorno I di x_0 in cui f ''$(x)>0$. In tale intorno I, il corollario 3 al teorema di Lagrange, la funzione f ' sarà strettamente crescente e dunque, siccome f ' si annulla in x_0, in un intorno sinistro di x_0 la funzione f ' sarà negativa, mentre in un intorno destro f ' sarà positiva.
Le ripercussioni sulla funzione f sono le seguenti: in un intorno sinistro di x_0 la f è strettamente decrescente, mentre in un intorno destro la f è strettamente crescente.
Esiste quindi un intorno di in x_0 cui $f(x)>f(x_0)$.
Il punto x_0 è dunque di minimo relativo per definizione.

[1.3]

Si ha f '(x_0)=f ''$(x_0)=0$.
Abbiamo quindi le seguenti informazioni su f:

- La tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale.
- La tangente al grafico di f ' in $(x_0$, f ' $(x_0))=(x_0, 0)$ è orizzontale

Non abbiamo però nessun'altra informazione sul comportamento della derivata prima f ': non sappiamo se x_0 è punto di estremo relativo oppure no per la f '.
E' quindi necessario calcolare la derivata terza f '''(x_0). Si possono presentare i seguenti due casi:

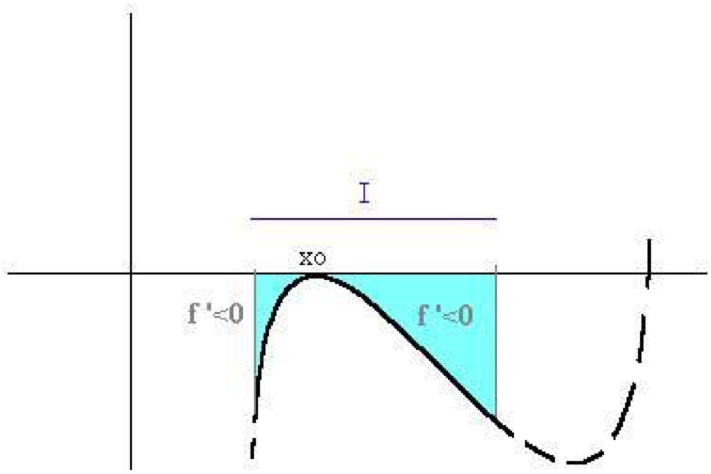
- f '''$(x_0)\neq 0$
- f '''$(x_0)=0$

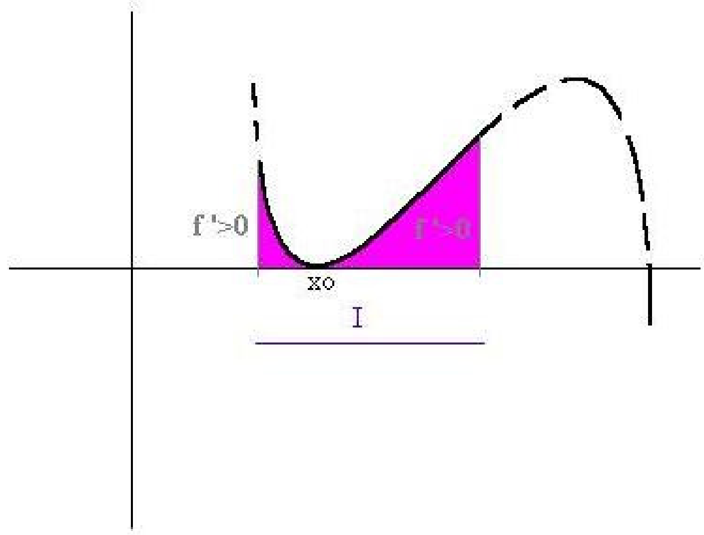
[2]

Il punto x_0 è un punto interno al dominio di f tale che f '(x_0)= f ''(x_0)=0 e f '''(x_0)≠0. Da tutto ciò si può concludere che

x_0 NON è NE' punto di MINIMO NE' punto di MASSIMO per la funzione f

Infatti, in tal caso, in base a considerazioni precedenti (si vedano [1.1] e [1.2]), possiamo concludere che il punto x_0 risulta essere di estremo relativo per la funzione f '. La situazione è dunque una delle seguenti:

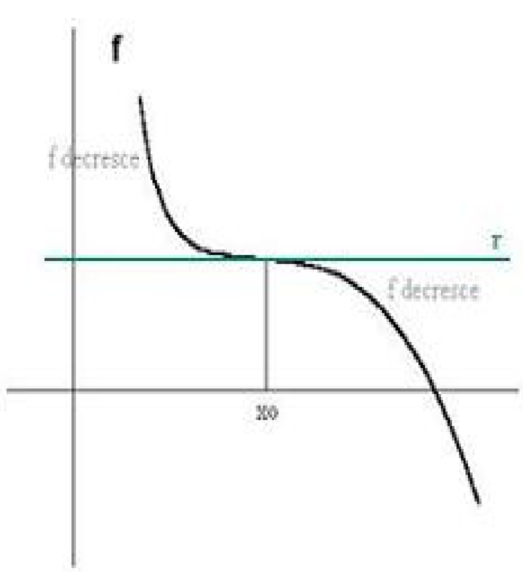


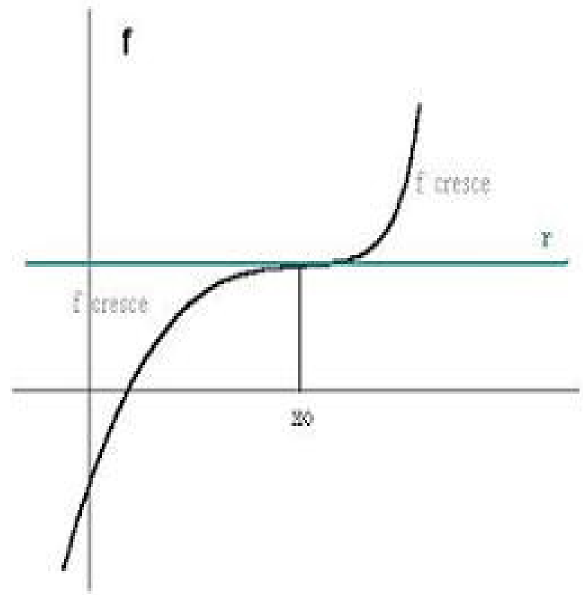


Da tutto ciò si può dedurre il comportamento della funzione f:

- Nel primo caso, siccome la f ' risulta strettamente negativa in un intorno I di x_0 (eccetto che in x_0), allora nell'intervallo I, per il corollario 3 al teorema di Lagrange, f è strettamente decrescente sia destra che a sinistra di x_0;
- Nel secondo caso, simmetricamente, nell'intervallo I, f è strettamente crescente sia destra che a sinistra di x_0.

Le due situazioni sono visualizzate dai seguenti grafici:





Come si può notare, la retta r, tangente al grafico nel punto (x_0, $f(x_0)$), risulta orizzontale.

---

[3]

Il punto x_0 è interno al dominio di definizione di f ed è tale che $f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$. In tal caso si devono calcolare le derivate successive in x_0, fino a trovare quella che non si annulla in x_0.
Sia $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, la prima derivata che non si annulla in x_0: si possono allora presentare i seguenti casi:

- n è pari
- n è dispari

[3.1]

Se n è pari, allora x_0 è punto di estremo relativo per f; in particolare:

- Se $f^{(n)}(x_0)>0$, allora x_0 è di MINIMO RELATIVO per f;
- Se $f^{(n)}(x_0)<0$, allora x_0 è di MASSIMO RELATIVO per f.

[3.2]

Se n è dispari, allora

x_0 NON è NE' punto di MINIMO NE' punto di MASSIMO per la funzione f