

EQUAZIONI E SISTEMI DI 2° GRADO

Prof. Domenico RUGGIERO

In questa breve trattazione vengono esposti la formula risolutiva di equazioni di secondo grado ed il procedimento risolutivo, per sostituzione, di sistemi di secondo grado. Il tutto corredato da esempi anche di sistemi parametrici.

Indice

1	Equazioni di 2° grado	1
2	Formula risolutiva ridotta	3
3	Sistemi di secondo grado	4
4	Esempi ed esercizi	5
4.1	Equazioni di secondo grado	5
4.2	Sistemi di secondo grado	7
4.3	Sistemi di secondo grado in cui figura un parametro reale	9

1 Equazioni di 2° grado

Un' *equazione di 2° grado*, nell'incognita x , ha la seguente forma canonica (o normale):

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.1)$$

Esaminiamo dapprima il caso di equazione non completa considerando sempre $a \neq 0$ altrimenti si otterrebbe una equazione di primo grado.

Ciò premesso, abbiamo i casi seguenti.

- Se $b = 0$ e $c = 0$, la (1.1) si scrive come

$$ax^2 = 0 \text{ (equazione monomia)}$$

da cui, dividendo ambo i membri per a ,

$$x^2 = 0$$

che è risolta da $x = 0$.

Pertanto, l'equazione monomia possiede due soluzioni coincidenti con quella nulla ovvero $x_1 = x_2 = 0$.

- Se $c = 0$, la (1.1) si scrive come

$$ax^2 + bx = 0 \text{ (equazione spuria)}$$

da cui, mettendo x in evidenza

$$x(ax + b) = 0$$

e, per legge di annullamento del prodotto,

$$x = 0 \vee ax + b = 0$$

da cui si ricavano le due soluzioni $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

- Se $b = 0$, la (1.1) si scrive come

$$ax^2 + c = 0 \text{ (equazione pura)}$$

da cui, trasportando c al secondo membro e dividendo ambo i membri per a ,

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

da cui

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

ovvero le soluzioni sono date da $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Tali soluzioni sono numeri reali se $-c/a > 0$ ovvero se a, c hanno segno discorde, altrimenti non sono reali.

Esaminiamo, adesso, il caso generale ovvero quello dell'equazione completa. Si dimostra, mediante passaggi algebrici, che le soluzioni della (1.1) sono ottenibili mediante la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.2)$$

dove la quantità sotto radice ($\Delta = b^2 - 4ac$) è detta *discriminante* e ci permette, in base al segno, di stabilire la tipologia delle due soluzioni ottenibili. Si ha, infatti,

- se $\Delta > 0$, l'equazione (1.1) ammette due soluzioni reali e distinte x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$);
- se $\Delta = 0$, l'equazione (1.1) ammette due soluzioni reali coincidenti ($x_1 = x_2$);
- se $\Delta < 0$, l'equazione (1.1) non ammette soluzioni reali (ammette due soluzioni complesse coniugate).

Consideriamo, ad esempio, l'equazione

$$x^2 - 5x - 3 = 0$$

in cui $a = 1, b = -5, c = -3$.

Risulta $\Delta = 5^2 - 4(1)(-3) = 25 + 12 = 37 > 0$ cosicché l'equazione ammette due soluzioni reali e distinte e, applicando la (1.2), si ha:

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$$

2 Formula risolutiva ridotta

Presentiamo, qui di seguito, un procedimento risolutivo della (1.1) utilizzabile quando il coefficiente di x è pari ovvero quando è della forma $b = 2k$ con k intero relativo o, più in generale, $k \in \mathbb{R}$.

Tale procedimento si ottiene dividendo per 2 tutte le quantità che intervengono nella (1.2).

Così facendo, si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a} \quad (2.1)$$

dove la quantità sotto radice è indicata anche col simbolo $\frac{\Delta}{4}$ ed ha la stessa funzione del Δ e, con questo simbolismo, la (2.1) può essere riscritta come

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a} \quad (2.2)$$

dove $\frac{\Delta}{4} = \frac{b^2}{4} - ac$.

Consideriamo, ad esempio, l'equazione

$$3x^2 + 4x - 1 = 0$$

in cui $a = 3$, $b = 4$, $c = -1$.

Applicando la (2.1), si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3}}{3} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

che sono le due soluzioni (e sono reali e distinte) dell'equazione considerata.

Consideriamo, adesso, un altro esempio: risolvere l'equazione

$$x^2 + 2\sqrt{2}x - 7 = 0$$

I coefficienti dell'equazione sono $a = 1$, $b = 2\sqrt{2}$, $c = -7$ sicché $b = 2k$ con $k = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ e, pertanto è applicabile la formula ridotta.

Essendo $\frac{\Delta}{4} = \frac{b^2}{4} - ac = (\sqrt{2})^2 - 1 \cdot (-7) = 2 + 7 = 9$, applicando la (2.2), si ha:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{9}}{1} = \sqrt{2} \pm 3$$

3 Sistemi di secondo grado

Un sistema di secondo grado di due equazioni in due incognite, nelle incognite x, y , è costituito da una equazione di secondo grado e da una di primo grado ovvero è della forma

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

il cui obiettivo è, al solito, quello di determinare le soluzioni comuni a tutte le equazioni del sistema che, in questo caso, sono, al più, due coppie di reali. Risolvere il sistema (3.1) per sostituzione comporta i seguenti passi:

- (i) si ricava una delle incognite dall'equazione di primo grado e la si sostituisce in quella di secondo grado;
- (ii) l'equazione di secondo grado che, adesso, è ad una sola incognita ed è detta *equazione risolvente*, ci permette, di fatto di stabilire la tipologia delle soluzioni del sistema nonché, di fatto, di risolverlo.

La tipologia delle soluzioni, che dipende dal discriminante, è in accordo con quelle di una equazione di secondo grado come esposto nella sezione 1.

Le soluzioni, dell'equazione risolvente, sono poi ottenibili applicando la formula risolutiva per equazioni di secondo grado;

- (iii) si determinano i valori dell'altra incognita sostituendo le soluzioni trovate al passo (ii) nell'equazione di primo grado.

Ovviamente, se si cercano soluzioni reali ed il discriminante dell'equazione risolvente è negativo, non si esegue il passo (iii).

Applichiamo il procedimento esposto per ricavare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - y + 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Ricavando y dall'equazione di primo grado che compare in (3.2), si ha:

$$y = -2x + 4$$

che, sostituito nella prima, conduce a

$$x^2 - (-2x + 4) + 1 = 0$$

da cui

$$x^2 + 2x - 4 + 1 = 0$$

Sommando i termini simili in quest'ultima, si ha:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

che rappresenta l'equazione risolvente.

Il suo discriminante è $\Delta = 16 > 0$ cosicché il risolvente ammette due soluzioni reali e distinte ed il sistema ammette due coppie di reali come soluzione. Le soluzioni, dell'equazione risolvente, sono $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ per cui le soluzioni del sistema sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ y_1 = -2x_1 + 4 = 10 \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = -2x_2 + 4 = 2 \end{array} \right.$$

ovvero le coppie $(-3, 10)$, $(1, 2)$.

4 Esempi ed esercizi

Presentiamo qui, di seguito esempi ed esercizi su quanto esposto in precedenza.

4.1 Equazioni di secondo grado

Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado:

1. $(x - 2)(x + 2) + 2(x + 1)^2 = 4x$;
2. $x^2 + 6x + 2 = 0$;
3. $4 - x - 3x^2 = 0$;
4. $x^2 + x + 2 = 0$;
5. $x^2 + 4x + 4 = 0$.

Passiamo alla risoluzione delle equazioni date.

1. L'equazione non è in forma canonica. Portiamola, dunque, in forma canonica eseguendo le operazioni richieste. Eseguendo il prodotto notevole e sviluppando il quadrato al primo membro, si ha:

$$x^2 - 4 + 2(x^2 + 2x + 1) = 4x$$

da cui, moltiplicando 2 per il trinomio tra parentesi al primo membro e trasportando $4x$ al primo membro, si ha:

$$x^2 - 4 + 2x^2 + 4x + 2 - 4x = 0$$

e, sommando i termini simili, si ottiene

$$3x^2 - 2 = 0$$

che è un'equazione pura. Trasportando -2 al secondo membro e dividendo ambo i membri per 3, si ha:

$$x^2 = \frac{2}{3}$$

da cui le soluzioni

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

2. Applicando la formula ridotta (2.1), si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 2}}{1} = -3 \pm \sqrt{7}$$

3. Moltiplicando ambo i membri per -1 , l'equazione può essere riscritta come

$$3x^2 + x - 4 = 0$$

da cui, applicando la formula risolutiva (1.2)

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-1 \pm 7}{6}$$

cosicché $x_1 = \frac{6}{6} = 1$, $x_2 = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$.

4. Applicando la formula risolutiva, si ha:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

ed, essendo negativo l'argomento della radice, le soluzioni non sono reali.

5. L'equazione ha il discriminante nullo cosicché presenta soluzioni reali e coincidenti essendo il primo membro un quadrato di binomio. L'equazione può essere, infatti, riscritta come

$$(x + 2)^2 = 0$$

da cui

$$x + 2 = 0$$

e, in definitiva, $x = -2$.

4.2 Sistemi di secondo grado

Stabilire se, i seguenti sistemi, ammettono soluzioni reali e, in tal caso determinarle:

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{cases};$$

$$2. \begin{cases} x + y^2 - \sqrt{2}y = 0 \\ y = \sqrt{2} \end{cases};$$

$$3. \begin{cases} x = y^2 + y \\ 2y + x = -4 \end{cases};$$

$$4. \begin{cases} y = x^2 - 5 \\ y = -4x \end{cases}.$$

Passiamo alla risoluzione.

1. Ricavando y dalla seconda equazione, si ha:

$$y = 2x - 2$$

che, sostituita nella prima conduce all'equazione risolvente

$$x^2 + (2x - 2)^2 - 2x + 2 - 1 = 0$$

che, portata in forma canonica, si presenta come

$$5x^2 - 10x + 5 = 0$$

da cui, dividendo ambo i membri per 5,

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Il discriminante di quest'ultima è $\Delta = 0$ e, d'altra parte, l'equazione può essere riscritta come

$$(x - 1) = 0$$

da cui $x = 1$. Pertanto il sistema ha soluzioni reali coincidenti ed, essendo, $y = 2 \cdot 1 - 2 = 0$, tali soluzioni coincidono con la coppia $(1, 0)$.

2. Sostituendo y , già esplicitata nella seconda, nella prima equazione, si ha:

$$x + (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2}\sqrt{2} = 0$$

da cui

$$x + 2 - 2 = 0$$

ovvero

$$x = 0$$

ed, essendo l'equazione risolvente di primo grado, il sistema ammette soluzioni reali coincidenti date, in questo caso da $x = 0 \wedge y = \sqrt{2}$.

3. Ricavando x dalla seconda equazione, si ha:

$$x = -2y - 4$$

che, sostituita nella prima, conduce all'equazione risolvente

$$-2y - 4 = y^2 + y$$

da cui, trasportando il secondo membro al primo, sommando i termini simili e moltiplicando ambo i membri per -1 ,

$$y^2 + 3y + 4 = 0$$

Il discriminante, di questa equazione, è $\Delta = 9 - 16 = -7 < 0$ cosicché il sistema non ammette soluzioni reali.

4. Sostituendo y nella prima equazione, si ha l'equazione risolvente:

$$-4x = x^2 + 5$$

che, in forma canonica si scrive, trasportando il primo membro al secondo e rileggendo l'uguaglianza da sinistra verso destra,

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

il cui discriminante è $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$ cosicché abbiamo due soluzioni reali e distinte e ciò vale anche per il sistema. Tali soluzioni sono $x_1 = -5$, $x_2 = 1$ come si ottiene risolvendo l'equazione.

Ne segue $y_1 = -4x_1 = 20$, $y_2 = -4x_2 = -4$ cosicché il sistema ha, per soluzioni, le coppie $(-5, 20)$, $(1, -4)$.

4.3 Sistemi di secondo grado in cui figura un parametro reale

Stabilire, per quali valori del parametro reale k , i seguenti sistemi, ammettono soluzioni reali e coincidenti:

$$1. \begin{cases} x^2 - x - 2y = 0 \\ y = kx - 2k \end{cases} ;$$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -x + k \end{cases} .$$

Passiamo alla risoluzione.

1. Sostituendo y nella prima equazione, si ha:

$$x^2 - x - 2kx + 4k$$

da cui, sommando i termini simili,

$$x^2 - (2k + 1)x + 4k = 0$$

che è l'equazione risolvente in cui, i coefficienti dell'incognita, dipendono dal parametro. Risulta $\Delta = (2k + 1)^2 - 16k = 4k^2 + 4k + 1 - 16k$ da cui $\Delta = 4k^2 - 12k + 1$.

Condizione, affinché il sistema ammetta soluzioni reali e coincidenti, è che sia $\Delta = 0$.

Nel nostro caso, si ha:

$$4k^2 - 12k + 1 = 0$$

da cui, applicando la formula ridotta,

$$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{4}$$

Trasportando 4 fuori radice, mettendo 2 in evidenza al numeratore e semplificandolo col denominatore, si hanno i valori di k richiesti:

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

2. Sostituendo y nella prima equazione e trasportando 1 al primo membro, si ha:

$$x^2 + (-x + k)^2 - 1 = 0$$

da cui

$$x^2 + x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

ovvero

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

che rappresenta l'equazione risolvente in forma canonica. Risulta $\Delta = 4k^2 - 8(k^2 - 1) = 4k^2 - 8k^2 + 8 = -4k^2 + 8 = 0$

Come nel caso precedente, il sistema ammette soluzioni reali coincidenti se $\Delta = 0$ ovvero se

$$-4k^2 + 8 = 0$$

da cui

$$4k^2 = 8$$

e, dividendo ambo i membri per 4 ed estraendo la radice, si ha:

$$k_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$