Esercitazione di Matematica sugli insiemi

1. Considerato l'insieme A formato dai numeri interi relativi compresi tra -10 e 2 (estremi inclusi), darne una rappresentazione nei tre modi.

2. Considerati gli insiemi A formato dalle lettere della parola *austria* e B costituito dalle lettere della parola *spagna*, determinare:

   (a) $A \cup B$;

   (b) $A \cap B$;

   (c) $A \setminus B$;

   (d) $A \Delta B$.

3. Dati gli insiemi $A = \{3, 5, 7\}$, $B = \{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\}$, rappresentare opportunamente il prodotto cartesiano $A \times B$ e scrivere tale insieme per elencazione.

4. Rappresentare, nel piano cartesiano, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

   (a) $A = \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-1, 0), (-2, 1), (3, \pi)\}$

   (b) $B = [0, 1] \times [0, 1]$

   (c) $C = (-2, 3] \times (2, 4)$

   (d) $D = [4, +\infty) \times (-\infty, -4]$

5. Scrivere e rappresentare l'insieme complementare $\overline{A}$ nei seguenti casi di sottoinsiemi reali:

   (a) $A = [10, +\infty)$;

   (b) $A = [0, 11]$;

   (c) $A = (-\infty, 10]$;

   (d) $A = (4, 10]$.

6. Siano A, B, C, D gli insiemi costituiti, rispettivamente, dalle lettere delle parole *paperino*, *topolino*, *paperone*, *pippo*.

   Calcolare

   (a) $(A \cup B) \cap (C \setminus B)$;

   (b) $(A \cap D) \times (C \setminus B)$;

   (c) $A \cap B \cap C \cap D$;

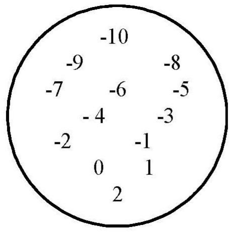
   (d) $(A \cap C) \cup (B \cap D)$.

Soluzioni

1. Iniziamo dalla rappresentazione *per elencazione*:

$$A = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

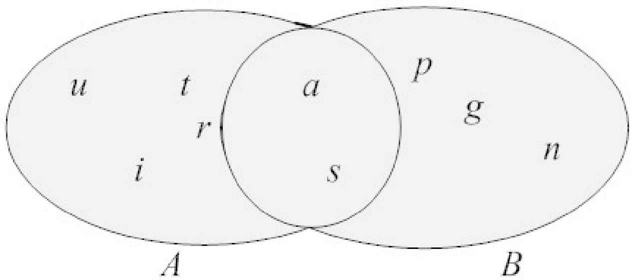
Utilizzando i *diagrammi di Eulero-Venn*, si ha:



Concludiamo con la *rappresentazione caratteristica*:

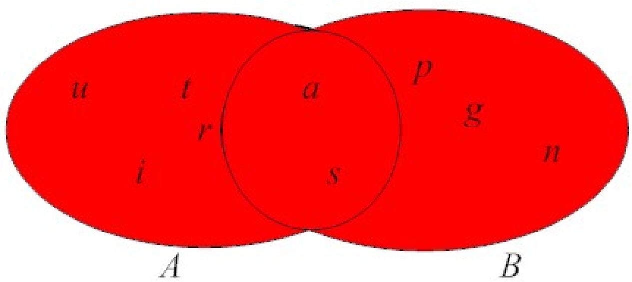
$$A = \{x \in Z : -10 \leq x \leq 2\}$$

2. Gli insiemi considerati possono essere scritti, per elencazione, nel modo seguente: $A = \{a, u, s, t, r, i\}$, $B = \{s, p, a, g, n\}$ ovvero, utilizzando i diagrammi di Eulero-Venn come in figura seguente:



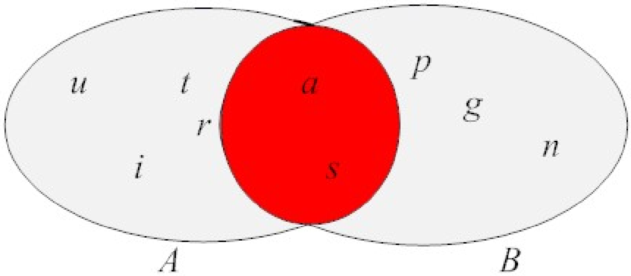
Eseguendo le operazioni richieste, colorando il risultato in colore scuro nei diagrammi, si ha la situazione seguente.

(a) Per quanto riguarda l'unione, si ha:



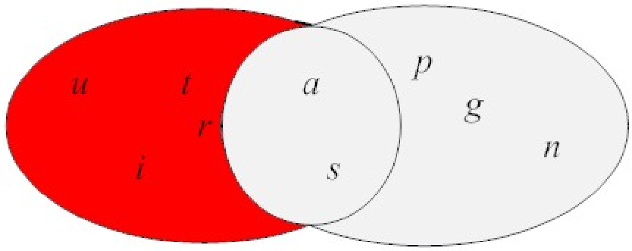
ovvero, per elencazione, $A \cup B = \{a, u, s, t, r, i, g, n, p\}$.

(b) Per quanto riguarda l'intersezione, si ha:



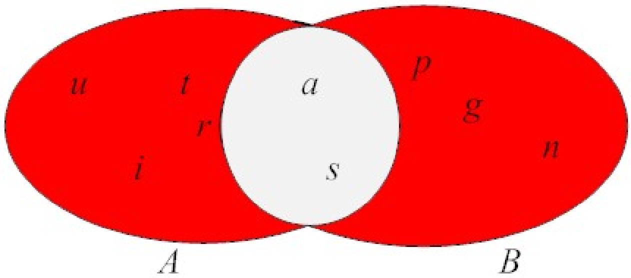
ovvero, per elencazione, $A \cap B = \{a, s\}$.

(c) Per quanto riguarda la differenza, tenendo presente il fatto che $A \backslash B = A - (A \cap B)$, si ha:



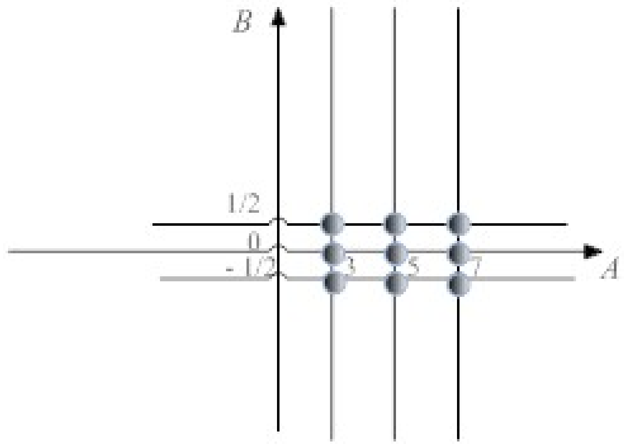
ovvero, per elencazione, $A \backslash B = \{u, i, t, r\}$.

(d) Per quanto riguarda la differenza simmetrica, tenendo presente che $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$, si ha:



ovvero, per elencazione, $A \backslash B = \{u, i, t, r, g, n, p\}$.

3. Un'opportuna rappresentazione, delle coppie ordinate (9 in totale) costituenti $A \times B$, è quella di che si ottiene utilizzando un diagramma cartesiano, come in figura seguente, ponendo gli elementi di A sull'asse orizzontale e quelli di B sull'asse verticale. Le coppie, costituenti il prodotto cartesiano, sono evidenziate da piccoli cerchi scuri.

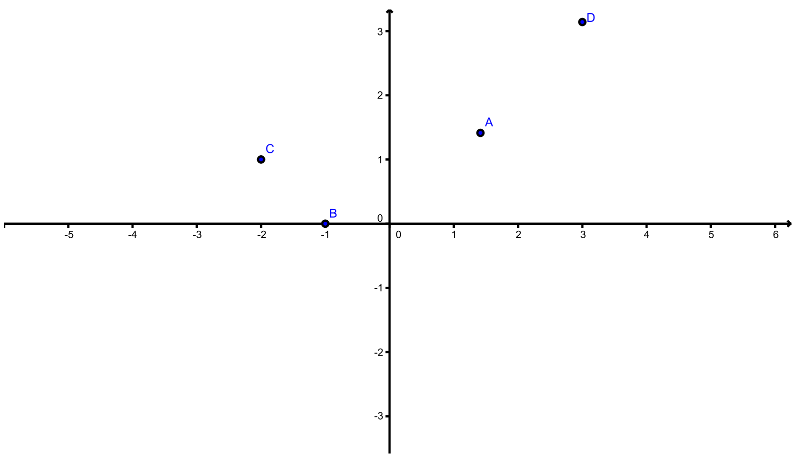


Volendo procedere ad una rappresentazione per elencazione, si ha:

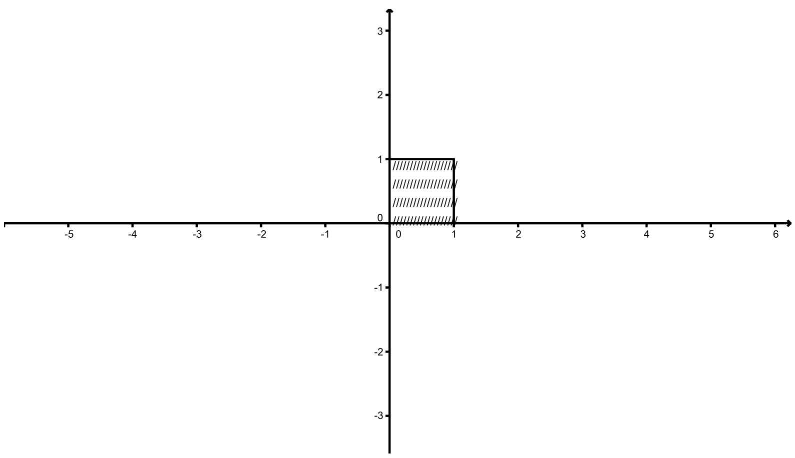
$A \times B = \{(3, -1/2), (3, 0), (3, 1/2)(5, -1/2), (5, 0), (5, 1/2), (7, -1/2), (7, 0), (7, 1/2)\}$

4. Rappresentare, nel piano cartesiano, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

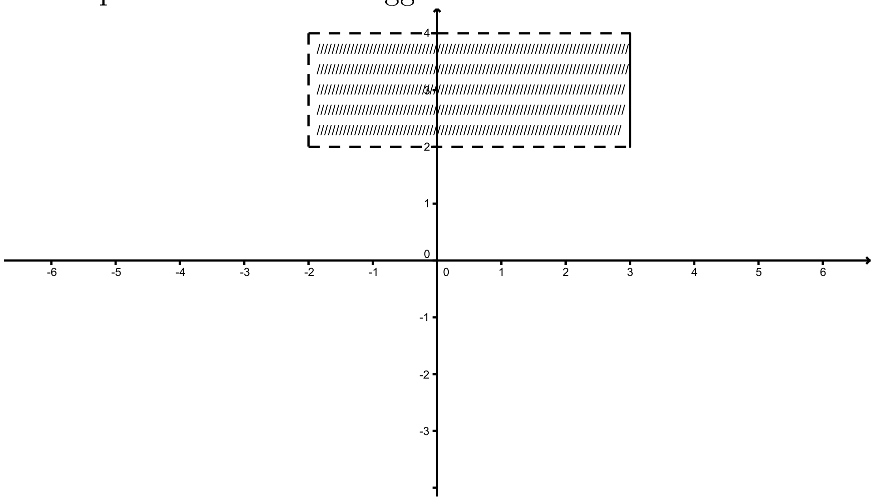
   (a) Indicando con P, B, C, D i quattro elementi dell'insieme A così come elencati, essi costituiscono i quattro punti del piano cartesiano rappresentati nel grafico seguente.



   (b) L'insieme B è la regione quadratica evidenziata in figura seguente incluso il bordo ovvero i segmenti costituenti i lati.

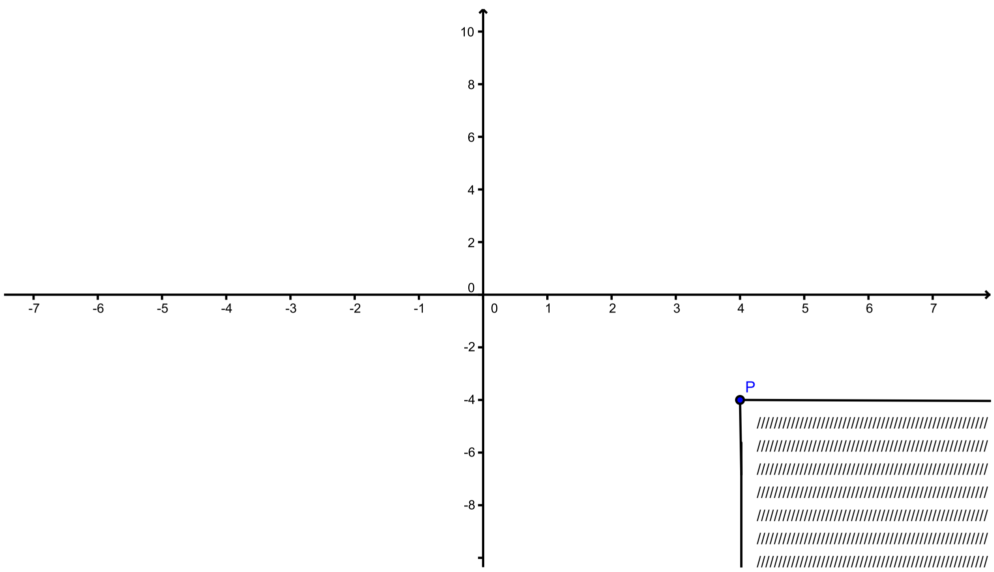


(c) L'insieme C è la regione rettangolare evidenziata in figura seguente dove la parte di bordo tratteggiata è esclusa.



(d) L'insieme D è la regione illimitata evidenziata nella figura seguente dove la parte di bordo (semirette) disegnata in modo continuo è inclusa.

Detto in altre parole, D è la regione individuata dalle due semirette uscenti da $P(4, -4)$ come in figura.



5. Ricordiamo che, se A è un intervallo della retta reale, il suo complementare è $\overline{A} = \mathbb{R} - A$ e che, inoltre, X è rappresentabile graficamente utilizzando una retta (retta reale) da cui è facilmente deducibile $\overline{A}$ dovendo essere $A \cup \overline{A} = \mathbb{R}$.

   Ciò premesso, passiamo a rispondere alle domande poste trattando la prima in modo dettagliato e rispondendo alle altre che possono, tuttavia, essere trattate come la stessa.

   (a) L'insieme $A = [10, +\infty)$ è rappresentabile nella prima delle due figure seguenti e, di conseguenza, il suo complementare è rappresentato nella seconda essendo $\overline{A} = (-\infty, 10)$.

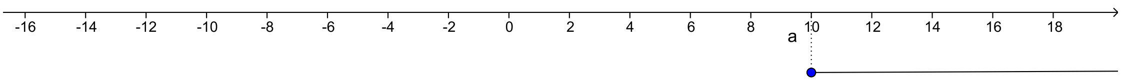


Figura 1: Rappresentazione dell'insieme A

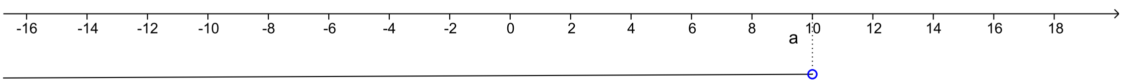


Figura 2: Rappresentazione dell'insieme $\overline{A}$

(b) Risulta $\overline{A} = \mathbb{R} - A = \mathbb{R} - [0, 11] = (-\infty, 0) \cup (11, +\infty)$.

(c) In questo caso il complementare di A è la semiretta verso destra uscente da 10 escludendo questo elemento: $\overline{A} = (10, +\infty)$.

(d) Risulta $\overline{A} = \mathbb{R} - (4, 10] = (-\infty, 4] \cup (10, +\infty)$.

6. Risulta

$$A = \{ \text{ p, a, e, r, i, n, o} \}$$

$$B = \{ \text{ t, o, p, l, i, n } \}$$

$$C = \{ \text{ p, a, e, r, o, n } \}$$

$$D = \{ \text{ p, i, o } \}$$

e, ricordando che, nelle espressioni proposte, vanno svolte prima le operazioni tra parentesi, passiamo ai calcoli richiesti.

(a) Risulta $A \cup B = \{ \text{ p, a, e, r, i, n, t, o, l } \}$ e $C \backslash B = \{ \text{ a, e, r, n } \}$ per cui $(A \cup B) \cap (C \backslash B) = \{ \text{ a, e, r, n } \}$.

(b) Posto $X = A \cap D$ e $Y = C \backslash B$, l'espressione data può essere riscritta come $X \times Y$.

Risulta $X = \{ \text{ p, i, o } \}$ e $Y = \{ \text{ a, e, r } \}$ da cui

$$X \times Y = \{ \text{ (p,a), (p,e), (p,r), (i,a), (i,e) (i,r), (o,a), (o,e), (o, r) } \}$$

(c) Poichè l'intersezione tra più insiemi consiste nel sottoinsieme degli elementi comuni a tutti gli insiemi considerati, si ha:

$$A \cap B \cap C \cap D = \{ \text{ p } \}$$

(d) Risulta $A \cap C = \{ \text{ p, a, e, r, n } \}$ e, poiché $D \subset B$, $B \cap D = D = \{ \text{ p, i, o } \}$ sicché $(A \cap C) \cup (B \cap D) = \{ \text{ p, a, e, r, n, i, o } \}$.