

Esercitazione di Matematica su matrici e sistemi lineari

Notazioni: $|A| = \det A$, $A^T =$ trasposta di A , $A^{-1} =$ inversa di A .

1. Si considerino le matrici A , B , C , D definite da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 7 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -6 \\ 6 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eseguire le seguenti operazioni ovvero calcolare le seguenti espressioni:

- $A + B$;
- AB ;
- $4A - \frac{1}{2}B$;
- $4CD$;
- $C - D^T$.

2. Calcolare il determinante della seguente matrice utilizzando lo sviluppo di Laplace:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2k & 1 & 2k \end{pmatrix}$$

è singolare.

4. Determinare per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} x+2 & -1 \\ x & 4 \end{pmatrix}$$

è tale che $|A| = 10$.

5. Si consideri il sistema lineare scritto in forma matriciale come $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvere il sistema utilizzando

- il metodo di Cramer;
- il metodo della matrice inversa.

Soluzioni

1. Per procedere, conviene ricordare brevemente come si eseguono le operazioni tra matrici.

(i) **Addizione algebrica:** date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ entrambe $m \times n$, la somma algebrica delle due matrici è la matrice $A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})$ con $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

In altre parole si addizionano algebricamente gli elementi di stesso posto delle due matrici.

(ii) **Prodotto di uno scalare per una matrice:** dati la matrice $A = (a_{ij})$ $m \times n$ e lo scalare (numero) α , il loro prodotto è dato dalla matrice $\alpha A = (\alpha a_{ij})$ con $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$.

In altre parole, si moltiplica ciascun elemento delle matrici per lo scalare.

(iii) **Moltiplicazione di matrici:** date due matrici $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ la prima di dimensione $m \times n$ e la seconda di dimensione $n \times q$, il prodotto (righe per colonne) della prima per la seconda costituisce la matrice $C = (c_{ij}) = AB$ dove il generico elemento c_{ij} si calcola mediante la formula

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

con $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q$.

(iv) **Trasposta di una matrice:** data la matrice $A = (a_{ij})$ di dimensione $m \times n$ la sua trasposta è la matrice $A^T = (a_{ji})$ con $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q$.

In altre parole A^T è la matrice $n \times m$ che si ottiene scambiando tra loro le righe e le colonne di A .

Ciò premesso, passiamo a rispondere ai quesiti posti.

• Per la (i) precedentemente richiamata, si ha:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1-1 & 0+2 & -5+4 \\ 7+0 & 0+2 & -2+0 \\ 0+6 & -1-1 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 7 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

• Per la (ii) precedentemente richiamata, si ha:

$$AB = \begin{pmatrix} -1+0-30 & 2+0+5 & 4+0-5 \\ -7+0-12 & 14+0+2 & 28+0-2 \\ 0+0+0 & 0-2+0 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 & 7 & -1 \\ -19 & 16 & 26 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Utilizzando successivamente la (ii) e la (i), si ha:

$$4A - \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -20 \\ 28 & 0 & -8 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 26 \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 1 & -22 \\ 28 & -1 & -8 \\ -3 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- Risulta

$$4CD = 4(CD) = 4 \begin{pmatrix} 17 & -19 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & -76 \\ 32 & -32 \end{pmatrix}$$

avendo applicato la (iii) e la (ii) precedentemente richiamate.

- Risulta

$$C - D^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 & -3 \\ -2 & 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

avendo applicato prima la (ii) per calcolare D^T e poi la (i) per ultimare il calcolo dell'espressione.

2. Ricordiamo che, lo sviluppo di Laplace per il calcolo del determinante di una matrice quadrata, consiste nello scegliere una riga oppure una colonna della matrice e, successivamente, aggiungere algebricamente ogni elemento della stessa moltiplicato per il suo complemento algebrico.

Inoltre, il complemento algebrico \mathcal{A}_{ij} di un generico elemento a_{ij} di una matrice A è dato dal prodotto $(-1)^{i+j}K$ dove K è il determinante della sottomatrice ottenuta da A privandola degli elementi della i -esima riga e della j -esima colonna.

Per semplificare i calcoli, conviene scegliere, se possibile, la riga o la colonna dove vi sono più zeri.

Nel caso in esame, procediamo ad uno sviluppo di Laplace secondo la riga 2:

$$|A| = 2\mathcal{A}_{21} + 5\mathcal{A}_{22} = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 10 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 6 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^3 \cdot 9 + 5 \cdot (-1)^4 \cdot (-61) = 2 \cdot (-1) \cdot 9 + 5 \cdot 1 \cdot (-61) = -18 - 305 = -323$$

dove i determinanti delle matrici di ordine 3 possono essere calcolati anche con la regola di Sarrus senza necessariamente dover procedere ad un nuovo sviluppo di Laplace come per la matrice di ordine 4.

3. Calcolando il determinante di $|A|$, ad esempio, mediante la regola di Sarrus, si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2k & 1 & 2k \end{vmatrix} = k^2 + 8$$

La matrice A è singolare se $|A| = 0$ per cui confrontando quest'ultima relazione con la penultima scritta, si perviene all'equazione di secondo grado

$$k^2 + 8 = 0$$

che non ammette soluzioni reali sicché la soluzione del problema posto è che nessun k rende singolare la matrice.

4. Procedendo in modo analogo all'esercizio precedente, si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} x+2 & -1 \\ x & 4 \end{vmatrix} = 5x + 8$$

e, dal confronto con la relazione $|A| = 10$, conduce all'equazione di primo grado

$$5x + 8 = 10 \implies 5x = 10 - 8 \implies 5x = 2 \implies x = \frac{2}{5}$$

5. Calcolando il determinante della matrice dei coefficienti A , si ha:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$$

sicché il sistema è determinato.

Ciò premesso, risolviamo il sistema dapprima col *metodo di Cramer*.

Posto $D = |A| = 14$, si ha, poi, che

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

da cui, applicando la formula risolutiva,

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} \\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{18}{14} = \frac{9}{7} \end{cases}$$

Passiamo, adesso, al *metodo della matrice inversa*.

Ricordiamo che, se A^{-1} è l'inversa della matrice dei coefficienti A , allora il sistema ha soluzione

$$X = A^{-1}B \quad (1)$$

La matrice inversa è data da

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \mathcal{A}^T \quad (2)$$

dove \mathcal{A} è la matrice dei complementi algebrici di ciascun elemento di A .

Calcolando questi ultimi come richiamato nell'esercizio 2, si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \mathcal{A}_{12} & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ \mathcal{A}_{31} & \mathcal{A}_{32} & \mathcal{A}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -9 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

da cui, sostituendo nella (2) e tenendo presente che $|A| = 14$,

$$A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -9 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ -9 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Ponendo A^{-1} e B nella (1), si ha:

$$X = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 \\ -9 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/14 \\ 4/14 \\ 18/14 \end{pmatrix}$$

e, in definitiva,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

come già determinato col metodo precedentemente utilizzato.