Esercitazione di Matematica
sui sistemi lineari di due equazioni in due incognite

Esercizio 1. Risolvere, con i quattro metodi analitici, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x + 7y = & 4 \\ x + 5y = & 4 \end{cases}$$

Esercizio 2. Risolvere, sia per via analitica che per via grafica, il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 7x - 2y = -6 \end{cases}$$

Esercizio 3. Risolvere i seguenti sistemi:

(a) $$\begin{cases} \dfrac{7x + 5y + 12}{27} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{11x}{2} + \dfrac{y}{4} = -2 \end{cases} ;$$

(b) $$\begin{cases} 4(x + 1) - 5(x - 2) + 2(x + 2y) = -(7 - x - 4y) \\ x + 2y = -2 \end{cases} ;$$

(c) $$\begin{cases} 4(x + 6) - 5(2 - y) + x = 7 - 2(x - y) \\ (x + 2)^2 + y = x^2 - 2 \end{cases} ;$$

(d) $$\begin{cases} x - 10y = 0 \\ (y + 3)(y - 3) - (x + y)^2 = 2y - x(2y + 5) - x^2 \end{cases} .$$

Esercizio 4. Determinare la reciproca posizione delle coppie di rette r ed s dei seguenti casi:

(a) $r : x - y = 2,\ s : 2x + 7y - 7 = 0;$

(b) $r : y - 5 = 0, s : x + y - 4 = 0;$

(c) $r : 2x + 5y - 10 = 0,\ s : \dfrac{2}{5}x + y - 2 = 0;$

(d) $r : x + y + 2 = 0,\ s : \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} + 1 = 0.$

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1.

Metodo di sostituzione.

Ricavando x dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, si ha:

$$\begin{cases} 3(4-5y)+7y = & 4 \\ x = & 4-5y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 12-15y+7y = & 4 \\ \longrightarrow \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -8y = & 4-12 \\ \longrightarrow \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -8y = -8 \\ \longrightarrow \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{-8}{-8} = 1 \\ x = 4-5y = 4-5 \cdot 1 = 4-5 = -1 \end{cases}$$

e, in definitiva, la soluzione del sistema è data dalla coppia $(x, y) = (-1, 1)$.

Metodo del confronto.

Ricavando x sia dalla prima sia dalla seconda equazione, si ha:

$$\begin{cases} x = \dfrac{4-7y}{3} \\ x = 4-5y \end{cases}$$

da cui, confrontando, le due equazioni

$$4-5y = \frac{4-7y}{3} \Longrightarrow \frac{3(4-5y)}{3} = \frac{4-7y}{3} \Longrightarrow 12-15y = 4-7y$$

Riducendo quest'ultima a forma normale, si ottiene:

$$8y-8 = 0 \Longrightarrow 8y = 8 \Longrightarrow y = \frac{8}{8} = 1$$

Sostituendo $y = 1$ in una delle due equazioni, si ricava anche la x $(x = -1)$ ottenendo $(x, y) = (1, -1)$ come trovato col metodo di sostituzione.

Metodo di riduzione.

Sottraendo alla prima equazione il triplo della seconda, si ottiene

$$-8y = -8 \Longrightarrow y = 1$$

che, sostituita in una delle due equazioni originarie, conduce anche al calc olo della x. Sostituendo nella seconda, si trova $x+5 = 4$ da cui $x = -1$ sicché il sistema è risolto dalla coppia $(x, y) = (-1, 1)$ come già calcolato con gli altri due metodi.

Metodo di Cramer.

Risulta

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15-7 = 8 \neq 0$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 20-28 = -8$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12-4 = 8$$

per cui

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{-8}{8} = -1 \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{8}{8} = 1 \end{cases}$$

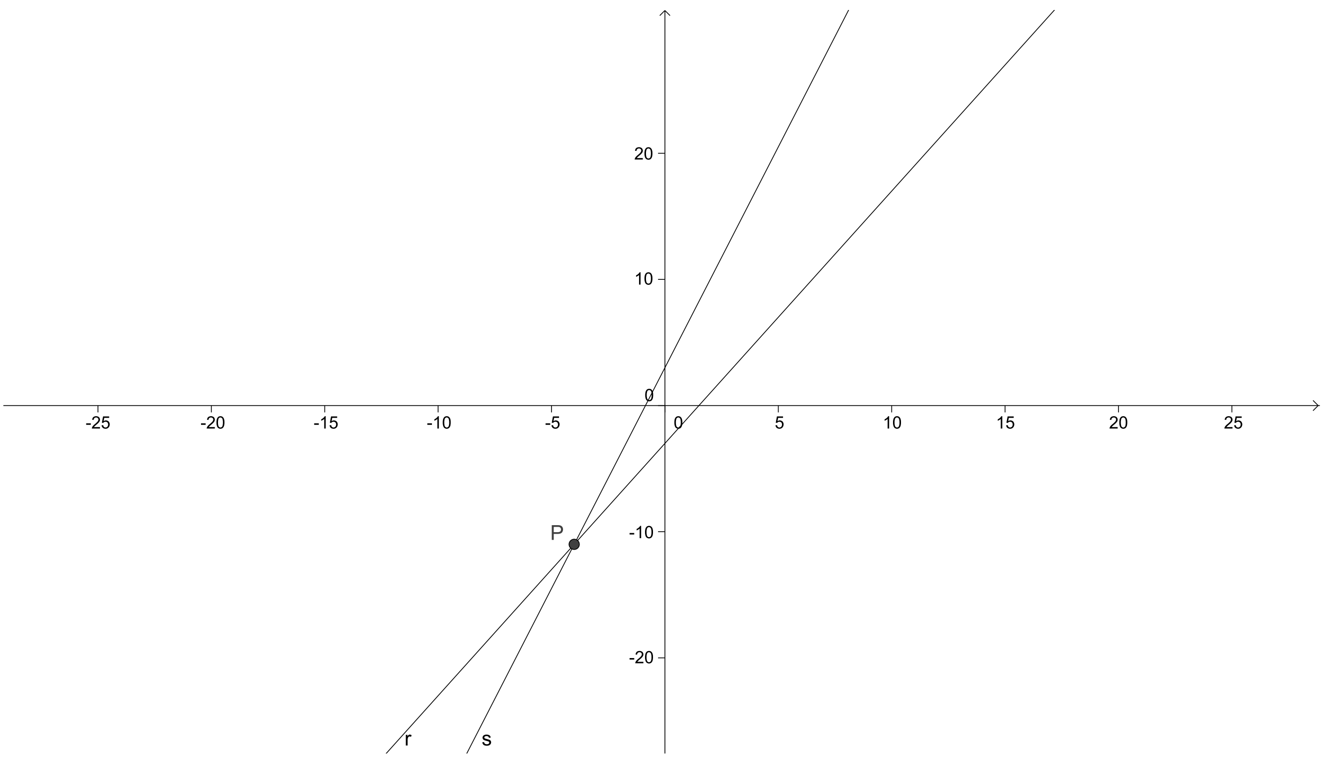
come ottenuto con gli altri metodi sopra applicati.

Esercizio 2. Risolviamo il sistema per sostituzione avendosi:

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x - 2y = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x - 2(2x - 3) = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x - 4x + 6 = -6 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ 7x - 4x = -6 - 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ 3x = -12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = 2x - 3 \\ x = -\dfrac{12}{3} = -4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -11 \end{cases}$$

La risoluzione per via grafica comporta il disegno delle rette $r : 2x - y = 3$ ed $s : 7x - 2y = -6$ e, dall'esame del grafico, si evince che le rette sono incidenti in $P(-4, -11)$ che rappresenta la soluzione del sistema.
La situazione grafica è rappresentata nel seguente diagramma cartesiano.



Esercizio 3. I sistemi, qui proposti, vanno dapprima portati alla forma normale per poi essere risolti con uno dei metodi noti.

(a) Portiamo il sistema alla forma normale liberando dai denominatori per poi procedere ad una risoluzione col metodo di siostituzione.

$$\begin{cases} \dfrac{7x + 5y + 12}{27} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{y}{3} \\ \dfrac{11x}{2} + \dfrac{y}{4} = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{7x + 5y + 12}{27} = \dfrac{12 - 9y}{27} \\ \dfrac{22x + y}{4} = -\dfrac{8}{4} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x + 5y + 12 = 12 - 9y \\ 22x + y = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 7x + 5y + 9y = 12 - 12 \\ 22x + y = -8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} 7x + 14y = 0 \\ 22x + y = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 22x + y = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ 22 \cdot (-2y) + y = -8 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ -24y + y = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -23y = -8 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = \dfrac{-8}{-23} = \dfrac{8}{23} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{16}{23} \\ \\ y = -\dfrac{8}{23} \end{cases}$$

(b) Portando il sistema a forma normale eliminando le parentesi nella prima equazione, si ha:

$$\begin{cases} 0x + 0y = -21 \\ \quad x + 2y = -2 \end{cases}$$

la cui prima equazione, riscrivibile come $0 = -21$, è impossibile e ciò, dunque, vale anche per il sistema.

(c) Procedendo come nel caso precedente, si ha:

$$\begin{cases} 4(x+6) - 5(2-y) + x = 7 - 2(x-y) \\ (x+2)^2 + y = x^2 - 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 24 - 10 + 5y + x = 7 - 2x + 2y \\ x^2 + 2x + 4 + y = x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 4x + 5y + x + 2x - 2y = 7 - 24 + 10 \\ x^2 + 2x + 4 + y - x^2 = -2 - 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x + 5y + x + 2x - 2y = 7 - 24 + 10 \\ x^2 + 2x + y - x^2 = -2 - 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 7x + 3y = -7 \\ 2x + y = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ 2x + y = -6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = -6 - 2x = -6 - 22 = -27 \end{cases}$$

e, in definitiva,

$$\begin{cases} x = 11 \\ y = -27 \end{cases}$$

avendo utilizzato il metodo di riduzione per risolvere il sistema quando ricondotto alla forma normale.

(d) Per ricondurre il sistema in forma normale, bisogna ridurre la seconda equazione nella forma $ax + by = c$.

A tale scopo si procede come segue.

$$(y+3)(y-3)-(x+y)^2 = 2y-2x(y+5)-x^2 \Longrightarrow y^2-9-x^2-2xy-y^2 = 2y-2xy-10x-x^2$$

$$\Longrightarrow 10x - 2y = 9$$

per cui la forma normale del sistema è

$$\begin{cases} x - 10y = 0 \\ 10x - 2y = -9 \end{cases}$$

che risolto, ad esempio con sostituzione ricavando x dalla prima equazione e sostituendo nella seconda, conduce alla soluzione

$$\begin{cases} x = -\dfrac{45}{49} \\ \\ y = -\dfrac{9}{98} \end{cases}$$

Esercizio 4. Studiando l'intersezione di ciascuna coppia di rette o per via analitica oppure per via grafica, si perviene ai seguenti risultati:

(a) rette incidenti;

(b) rette incidenti;

(c) rette coincidenti;

(d) rette parallele.