Esercitazione di Matematica sulle disequazioni algebriche lineari

1. Risolvere le seguenti disequazioni lineari:
   (a) $4x+3>0$;
   (b) $5-2x\le 0$;
   (c) $11-(4x-3)<6(2-x)$;
   (d) $2x+4-(1-x)\ge 0$;
   (e) $\frac{x+3}{5}-\frac{1}{10}>\frac{x}{2}-x$;
   (f) $\frac{3-x}{12}+\frac{1}{3}<\frac{x+1}{2}-\frac{5x}{6}$;
   (g) $(x+2)(x-2)-(1-x)^2\ge 1-2x$;
   (h) $(x+2)(x-5)+x(1-x)<0$;
   (i) $(x+2)(x^2-5x+4)-5>x(x^2-3x)$;
   (j) $(x+2)^2-5(1-x)<x^2$.

2. Risolvere le seguenti disequazioni riconducibili a lineari:
   (a) $\frac{2x}{4-x}<0$;
   (b) $\frac{2x-5}{4-2x}\ge 0$;
   (c) $x(4x-3)(2-x)\le 0$;
   (d) $(2x+4)(1-x)(2-5x)(x+3)\ge 0$;

3. Risolvere i seguenti sistemi di disequazioni:
   (a) $\begin{cases} 4x+5>0 \\ 15-5x\le 0 \\ 10x+7\ge 0 \\ 6-7x<0 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} (4x-5)(5-9x)>0 \\ \frac{15x+3}{4-6x}\le 0 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} 4x-15>0 \\ 2-x\le 0 \\ x(x-5)(4-x)\le 0 \end{cases}$
   (d) $\begin{cases} 2x-15>0 \\ 1-x\le 0 \\ \frac{4-10x}{7x+2}\le 0 \end{cases}$

4. Risolvere le seguenti disequazioni in cui compaiono valori assoluti:
   (a) $|x-16|<10$;
   (b) $|3x+9|\ge 6$;
   (c) $|16-10x|\le 2$;
   (d) $|10-2x|\ge 2$.

Risoluzione delle disequazioni proposte

Esercizio 1.

(a) Trasportando 3 al secondo membro e dividendo ambo i membri per 4, si ha $x > -\frac{3}{4}$ che rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione.

(b) Procedendo come al punto (a) precedente e tenendo presente la seconda parte del secondo principio di equivalenza per disequazioni, si ha:

$$5 - 2x \le 0 \Rightarrow -2x \le -5 \Rightarrow x \ge \frac{-5}{-2} \Rightarrow x \ge \frac{5}{2}$$

(c) Eliminando le parentesi onde ricondurre la disequazione a forma normale per poi procedere analogamente ai casi precedenti, si ha:

$$11 - (4x - 3) < 6(2 - x) \Rightarrow 11 - 4x + 3 < 12 - 6x \Rightarrow -4x + 6x > 12 - 14 \Rightarrow$$

$$2x > -2 \Rightarrow x > \frac{-2}{2} \Rightarrow x > -1$$

(d) Procedendo come nel caso precedente, si ha:

$$2x + 4 - (1 - x) \ge 0 \Rightarrow 2x + 4 - 1 + x \ge\Rightarrow 3x + 3 \ge 0 \Rightarrow 3x \ge -3 \Rightarrow x \ge -\frac{3}{3} \Rightarrow x \ge -1$$

(e) Moltiplicando ambo i membri per il minimo comun denominatore ovvero eseguendo tale operazione dopo aver ridotto le frazioni allo stesso denominatore, si ha:

$$\frac{x+3}{5} - \frac{1}{10} > \frac{x}{2} - x \Rightarrow \frac{2(x+3)-1}{10} > \frac{5x - 10x}{10} \Rightarrow 2(x+3) - 1 > 5x - 10x$$

Eliminando la parentesi e trasportando i termini con la x al primo membro e i termini noti al secondo, si ha:

$$2x + 6 - 1 > -5x \Rightarrow 2x + 5x > -5 \Rightarrow 7x > -5 \Rightarrow x > -\frac{5}{7}$$

(f) Procedendo come alla precedente lettera (e), si ha:

$$\frac{3-x}{12} + \frac{1}{3} < \frac{x+1}{2} - \frac{5x}{6} \Rightarrow \frac{3 - x + 4}{12} < \frac{6(x+1) - 10x}{12} \Rightarrow -x + 7 < 6x + 6 - 10x \Rightarrow$$

$$-x - 6x + 10x < 6 - 7 \Rightarrow 3x < -1 \Rightarrow x < -\frac{1}{3}$$

(g) Per portare in forma normale la disequazione è necessario eliminare le parentesi calcolando le espressioni letterali.
Così facendo, si ha:

$$(x+2)(x-2) - (1-x)^2 \ge 1 - 2x \Rightarrow x^2 - 4 - (1 - 2x + x^2) \ge 1 - 2x \Rightarrow$$

$$x^2 - 4 - 1 + 2x - x^2 - 1 + 2x \ge 0$$

Riducendo i termini simili al primo membro, si ha la disequazione in forma normale:

$$4x - 6 \ge 0$$

da cui, dividendo ambo i membri per 4 dopo aver trasportato -6 secondo membro, si ha l'insieme delle soluzioni: $x \ge \frac{3}{2}$.

(h) In questo caso, come anche nei due punti successivi, procediamo analogamente al precedente punto (g).
Così facendo, si ha:

$$(x+2)(x-5) + x(1-x) < 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 2x - 10 + x - x^2 < 0 \Rightarrow -2x - 10 < 0 \Rightarrow$$

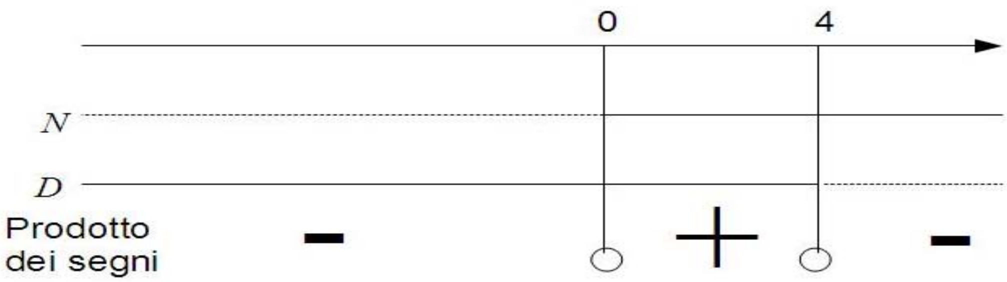
$$-2x < 10 \Rightarrow x > \frac{10}{-2} = -5.$$

(i) $$(x+2)(x^2-5x+4)-5>x(x^2-3x) \Rightarrow x^3-5x^2+4x+2x^2-10x+8-5>x^3-3x^2 \Rightarrow$$
$$x^3-5x^2+4x+2x^2-10x+8-5-x^3+3x^2>0 \Rightarrow -6x+3>0 \Rightarrow -6x>-3 \Rightarrow x>\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$$

(j) $$(x+2)^2-5(1-x)<x^2 \Rightarrow x^2+4x+4-5+5x-x^2<0 \Rightarrow 9x-1<0 \Rightarrow 9x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{9}$$

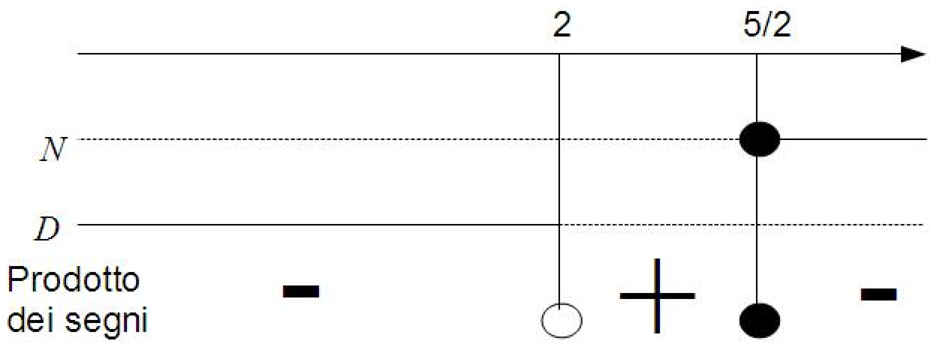
Esercizio 2.

(a) Studiamo dapprima il segno del numeratore $N(x)=2x$ e quello del denominatore $D(x)=4-x$ partendo dalle disequazioni $N(x)>0$ e $D(x)>0$.
Così facendo, si ha:
$N(x)>0 \Rightarrow 2x>0 \Rightarrow x>0$;
$D(x)>0 \Rightarrow 4-x>0 \Rightarrow x<4$.
Tracciamo, adesso il grafico dei segni mettendo una linea continua per gli intervalli di positività ed una tratteggiata per gli intervalli di negatività di *N* e *D*.



L'insieme soluzione *S* è dato dall'unione degli intervalli il cui prodotto dei segni è negativo e, dunque, $S=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$.

(b) Procediamo in modo del tutto analogo al precedente.
$N(x)\geq 0 \Rightarrow 2x-5\geq 0 \Rightarrow x\geq \frac{5}{2}$.
$D(x)>0 \Rightarrow 4-2x>0 \Rightarrow x<2$.



Dunque, $S=\left(2,\frac{5}{2}\right]$.

(c) In questo caso abbiamo un prodotto di tre fattori di primo grado confrontato con lo zero sicché si procede in modo del tutto analogo ai due casi precedenti studiando il segno di ciascun fattore per poi procede ad un grafico dei segni dove farne il loro prodotto

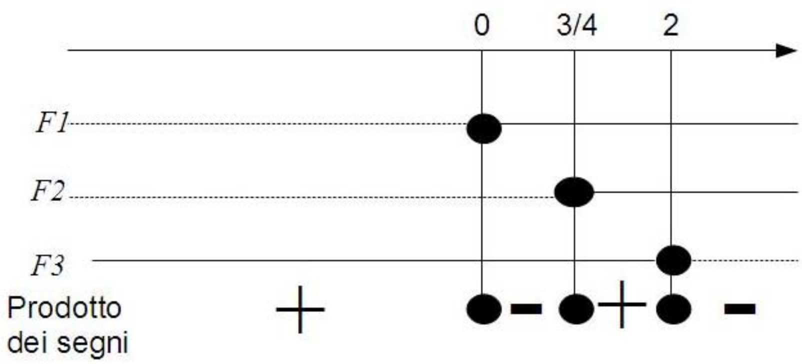
scegliendo, quale soluzione, l'unione degli intervalli il cui prodotto dei segni è concorde col verso della disequazione di partenza ovvero è nullo o negativo.
Studiamo, dunque il segno, dei fattori partendo dalle disequazioni che vogliono ciascun fattore non negativo:

$F_1(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$;

$F_2(x) \geq 0 \Rightarrow 4x-3 \geq 0 \Rightarrow 4x \geq 3 \Rightarrow x \geq \dfrac{3}{4}$;

$F_3(x) \geq 0 \Rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x \Rightarrow x \leq 2$.

Passiamo al grafico dei segni e al loro prodotto:



da cui segue che la soluzione è $S = \left[0, \dfrac{3}{4}\right] \cup [2, +\infty)$.

(d) Procedendo in modo analogo all'esercizio precedente e tenendo conto del fatto che, in questo caso i fattori sono quattro, si perviene alla soluzione $S = (-\infty, -3] \cup \left[-2, \dfrac{2}{5}\right] \cup [1, +\infty)$.

Esercizio 3.

(a) Risolviamo singolarmente ciascuna equazione del sistema ottenendo:

(I) $4x+5>0 \Rightarrow 4x>-5 \Rightarrow x>-\dfrac{5}{4}$.

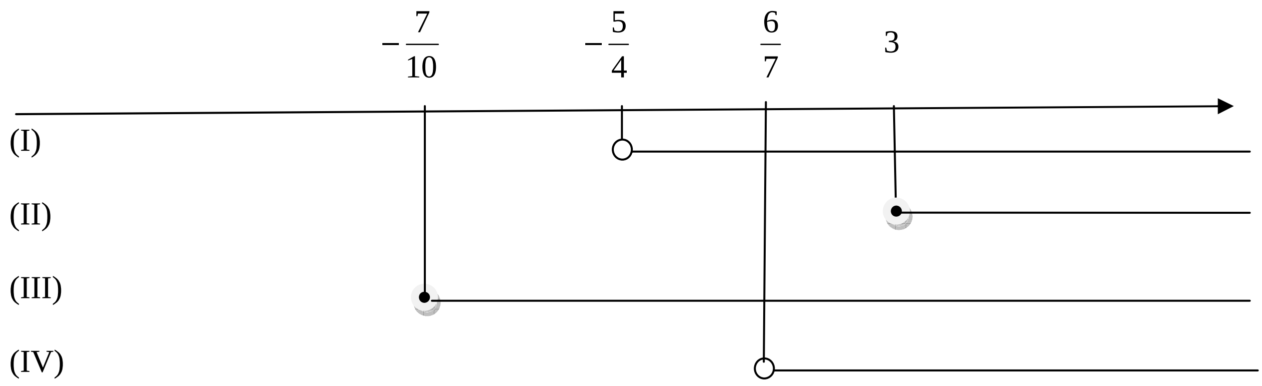
(II) $15-5x \leq 0 \Rightarrow -5x \leq -15 \Rightarrow x \geq \dfrac{-15}{-5} \Rightarrow x \geq 3$.

(III) $10x+7 \geq 0 \Rightarrow 10x \geq -7 \Rightarrow x \geq -\dfrac{7}{10}$.

(IV) $6-7x<0 \Rightarrow -7x<-6 \Rightarrow x>\dfrac{-6}{-7} \Rightarrow x>\dfrac{6}{7}$.

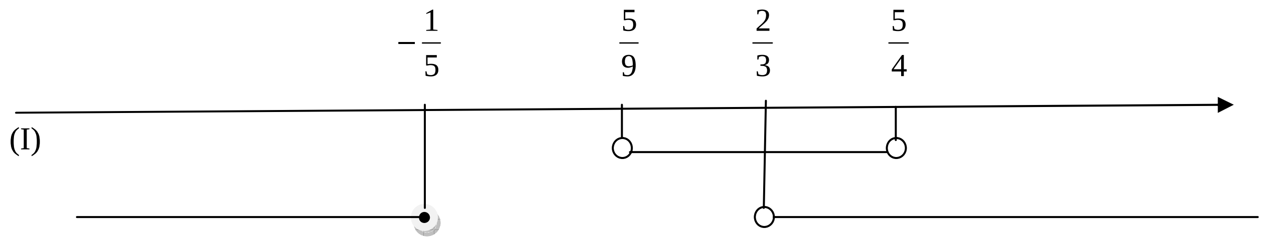
La soluzione S del sistema è data dall'intersezione dei quattro insiemi trovati ai punti (I), (II), (III) e (IV) precedenti e, per individuarla risulta utile il grafico delle soluzioni dove i quattro insiemi vengono posti su livelli diversi ed S è l'unione degli intervalli per cui si hanno tante linee continue quante sono le disequazioni del sistema (4 in questo caso).

Nella figura seguente viene riportato il grafico delle soluzioni dove il simbolo ○ sta a significare che l'estremo non è compreso mentre il simbolo ● indica, invece, che l'estremo è compreso nell'intervallo rappresentato.



Dall’esame del grafico si conclude, quindi, che $S = [-3,+\infty)$.

(b) Procedendo come nel caso precedente risolvendo separatamente le sue disequazioni del sistema, le quali vanno risolte utilizzando la regola del prodotto dei segni (ome nello svolgimento dell’es. 2.), si trova $\begin{cases} (4x-5)(5-9x) > 0 \\ \dfrac{15x+3}{4-6x} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{5}{9} < x < \dfrac{5}{4} & \text{(I)} \\ x \leq -\dfrac{1}{5} \vee x > \dfrac{2}{3} & \text{(II)} \end{cases}$ da cui, determinando l’intersezione tra gli insiemi (I) e (II) eventualmente mediante il grafico delle soluzioni, si ha calcola la soluzione S del sistema.
Il grafico delle soluzioni è, in effetti, il seguente.



da cui si deduce che $S = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{4}\right)$.

(c) Risolvendo separatamente le tre disequazioni del sistema (la terza va risolta utilizzando il grafico dei segni ed il relativo prodotto come nell’es. 2) e calcolando l’intersezione dei tre insiemi soluzione come agli ultimi precedenti punti (a) e (b), si determina la soluzione del sistema costituente l’insieme $S = \left(\dfrac{15}{4}, 4\right] \cup [5,+\infty)$.

(d) Ancora risolvendo separatamente le tre disequazioni del sistema (la terza va risolta utilizzando il grafico dei segni ed il relativo prodotto come nell’es. 2) e calcolando l’intersezione dei tre insiemi soluzione come agli ultimi precedenti punti (a) e (b), si determina la soluzione del sistema costituente l’insieme $S = \{\}$ (cioè il sistema non ammette alcuna soluzione).

Esercizio 4.

(a) Togliendo il valore assoluto si perviene alla catena di disuguaglianze $-10 < x - 16 < 10$ da cui $-10 + 16 < x < 10 + 16 \Rightarrow 6 < x < 26$.

Si noti che, allo stesso risultato si perviene risolvendo il sistema $\begin{cases} x-16>-10 \\ x-16<10 \end{cases}$ a cui la disequazione è equivalente.

(b) Togliendo il segno di valore assoluto, la soluzione della disequazione è ottenibile mediante l'unione insiemistica di seguito riportata:
$3x+9\leq -6 \vee 3x+9\geq 6 \Rightarrow x\leq -5 \vee x\geq -1$.

(c) Procedendo in modo analogo allo svolgimento dell'esercizio 4-(a) precedente si ha: $|16-10x|\leq 2 \Rightarrow -2\leq 16-10x\leq 2 \Rightarrow -2-16\leq -10x\leq 2-16 \Rightarrow \frac{-18}{-10}\geq x\geq \frac{-14}{-10} \Rightarrow \frac{7}{5}\leq x\leq \frac{9}{5}$

(d) Procedendo come nello svolgimento dell'esercizio 4-(b) precedente si ha: $|10-2x|\geq 2 \Rightarrow 10-2x\leq -2 \vee 10-2x\geq 2 \Rightarrow -2x\leq -12 \vee -2x\geq -8 \Rightarrow x\geq 6 \vee x\leq 4$ e, in definitiva, $S=(-\infty,4]\cup[6,+\infty)$.