Esercitazione di Matematica

Argomento: esponenziali e logaritmi

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali e logaritmiche:

1. $e^{x^2+1} > 4$;
2. $\left(\frac{2}{5}\right)^{5x+6} < \sqrt[4]{\left(\frac{2}{5}\right)^{6-x}}$;
3. $121^x - 11^{5x+6} \geq 0$;
4. $\frac{1}{3^{28-2x}} > 27^{4x}$;
5. $2^{2x-5} \leq 5$;
6. $9^x < 7^{5(x-2)}$;
7. $\log_2(4-2x) - 7 > 0$;
8. $\log_{\frac{1}{6}}(4-2x) > 2$;
9. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+3x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(2)$;
10. $\ln(5x-2) + \ln(x+1) \geq \ln(x)$.

Soluzioni

1. Facendo il $\ln(\cdot)$ di ambo i membri e tenendo conto del fatto che la funzione $y = \ln x$ è strettamente cresceente, si ha:

   $\ln e^{x^2+1} > \ln 4 \Longrightarrow (x^2+1)\ln e > \ln 4 \Longrightarrow (x^2+1)\cdot 1 > \ln 4 \Longrightarrow x^2+1 > \ln 4 \Longrightarrow x^2 + 1 - \ln 4 > 0.$

   L'equazione associata a quest'ultima è $x^2+1-\ln 4 = 0$ da cui, trasportando il termine noto al secondo membro ed estraendo la radice quadrata algebrica, $x_{1,2} = \pm\sqrt{\ln 4 - 1}$.

   Poiché il oefficiente di x^2 è $1 > 0$, la disequazione è verificata per valori esterni all'intervallo di estremi x_1, x_2 sicché essa è risolta dall'insieme $S = (-\infty, -\sqrt{\ln 4 - 1}) \cup (\sqrt{\ln 4 - 1}, +\infty)$.

2. Tenendo conto del fatto he $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ e della potenza di potenza, a disequazione data può essere risritta come

   $$\left(\frac{2}{5}\right)^{5x+6} < \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-x}{4}}$$

   da cui, trasferendo la disequazione agli esponenti invertendo il verso poiché le basi sono uguali ma comprese tra 0 ed 1, si ha:

   $$5x+6 > \frac{6-x}{4} \Longrightarrow \frac{4(5x+6)}{4} > \frac{6-x}{4} \Longrightarrow 20x - 24 > 6 - x \Longrightarrow$$

   $$20x + x > 6 - 24 \Longrightarrow 21x > -18 \Longrightarrow x > \frac{-18}{21} \Longrightarrow x > -\frac{6}{7}$$

   e, dunque, la disequazione di partenza ha per soluzioni le $x \in S$ essendo l'insieme $S = (-6/7, +\infty)$.

3. Trasportando il termine negativo al secondo membro, tenendo conto del fatto che $121 = 11^2$ e della potenza di potenza, la disequazione è riscrivibile come $11^{2x} \geq 11^{5x+6}$ da cui, trasferendo la disuguaglianza agli esponenti essendo le basi uguali a $11 > 1$, si ha:

   $$2x \geq 5x + 6 \Longrightarrow 2x - 5x \geq 6 \Longrightarrow -3x \geq 6 \Longrightarrow x \leq \frac{6}{-3} \Longrightarrow x \leq -2$$

4. Tenendo conto del fatto che $\frac{1}{a^n} = a - n$, $27 = 3^3$ e della potenza di potenza la disequazione può essere riscritta come

   $$3^{-(28-2x)} > 3^{3\cdot 4x} \Longrightarrow 3^{2x-28} > 3^{12x}$$

da cui, procedendo in modo analogo al caso precedente,

$$2x-28 > 12x \Longrightarrow 2x-12 > 28 \Longrightarrow -10x > 28 \Longrightarrow x < \frac{28}{-10} \Longrightarrow x < -\frac{14}{5}$$

5. Proedendo in modo abnalogo a quanto fatto nell'esercizio 1., si ha:

$$2x - 5 \leq \log_2 5 \Longrightarrow 2x \leq \log_2 5 + 5 \Longrightarrow x \leq \frac{\log_2 5 + 5}{2}$$

6. Poiché abbiamo un confronto (mediante la relazione d'ordine $<$) tra due esponenziali a base diversa, passiamo al $\ln(\cdot)$ di ambo i membri ottenendo

$$\ln 9^x < \ln 7^{5(x-2)} \Longrightarrow x \ln 9 < 5(x-2) \ln 7 \Longrightarrow x \ln 9 < 5x \ln 7 - 10 \ln 7$$

$$\Longrightarrow x \ln 9 - 5 \ln 7 < -10 \ln 7 \Longrightarrow (\ln 9 - 5 \ln 7)x < -10 \ln 7 \Longrightarrow x > \frac{-10 \ln 7}{\ln 9 - 7 \ln 5}$$

dove nel cambiare il verso nell'ultima scrittura si è tenuto conto del fatto che $\ln 9 - 5 \ln 7 < 0$.

7. Ricordiamo che, se D è il dominio del log. che compare nella disequazione logaritmica data ed S_1 l'insieme soluzione di quast'ultima, la soluzione è, in definitiva, $S = S_1 \cap D$. Risulta

$$D: \ 4 - 2x > 0 \Longrightarrow x < 2$$

e, quindi, $D = (-\infty, 2)$.

Riguardo a $\log_2(4 - 2x) - 7 > 0$, si ha, trasportando -7 al secondo membro e facendo l'esponenziale in base 2 di ambo i membri,

$$4 - 2x > 2^7 \Longrightarrow -2x > 128 - 4 \Longrightarrow x < \frac{124}{-2} \Longrightarrow x < -62$$

e, dunque, $S_1 = (-\infty, -62)$.

Ne consegue che l'insieme soluzione della disequazione di partenza è $S = S_1 \cap D = S_1$ in quanto $S_1 \subset D$.

Si noti che, mettendo a sistema le due disequazioni che hanno condotto alla determinazione di D e di S_1 e risolvendolo, si perviene allo stesso risultato per S.

8. Procedendo in modo analogo al caso precedente ed utilizzando le stesse notazioni, abbiamo:

$$D:\ 4-2x>0 \Longrightarrow x<2$$

$$S_1:\ \ \log_{\frac{1}{6}}(4-2x)>2 \Longrightarrow 4-2x<\left(\frac{1}{6}\right)^2 \Longrightarrow -2x<\frac{1}{36}-4 \Longrightarrow x>\frac{\frac{1}{36}-4}{-2}=\frac{133}{72}$$

avendo tenuto conto del fatto che, fare l'esponenziale di ambo i membri con base ompresa tra 0 e 1, comporta una inversione del verso della disequazione.

Si ha, poi, che l'insieme soluzione dell'equazione di partenza è

$$S=S_1\cap D=\left(-\infty,\frac{133}{72}\right)\cap(-\infty,2)=\left(\frac{133}{72},2\right)$$

9. Per quanto osservato in coda alla risoluzione dell'eserizio 7., la disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x^2+3x>0 \\ x^2+3x\geq 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2+3x>0 \\ x^2+3x-2\geq 0 \end{cases}$$

dove la prima disequazione rappresenta il dominio del log. al primo membro e la seconda è ottenuta traseferendo la disequazione agli argomenti avendo invertito il verso poiché la base $1/2\in(0,1)$.

Risolvendo le due disequazioni di seondo grado he compongono l'ulstimo sistema sritto, si ha:

$$\begin{cases} x<-3\vee x>0 \\ x\leq\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\vee x\geq\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

da cui la soluzione $S=\left(-\infty,\dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}\right]\bigcup\left[\dfrac{-3+\sqrt{17}}{2},+\infty\right)$.

10. Procedendo in modo analago alla risoluzione dell'esercizio precedente, la disequazione data è equivalente al sistema

$$\begin{cases} 5x-2>0 \\ x+1>0 \\ x>0 \\ \ln[5x-2)(x+1)]\geq\ln(x) \end{cases}$$

dove le prime tre equazioni rappresentano il dominio dei logaritmi presenti mentre nello scrivere la quarta disequazione si è tenuto onto della proprietà $\log_a(x) + \log_a(y) = \log_a(xy)$.

Trasferendo la disequazione agli argomenti nella quarta, si ha:

$$\begin{cases} 5x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x > 0 \\ (5x - 2)(x + 1) \geq x \end{cases}$$

da cui, riconducendo a forma normale l'ultima disequazione,

$$\begin{cases} 5x - 2 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ x > 0 \\ 5x^2 + 11x + 4 \geq 0 \end{cases}$$

e, risolvendo ciascuna disequazione,

$$\begin{cases} x > 0\frac{2}{5} \\ x > -1 \\ x > 0 \\ x \leq \dfrac{-11 - \sqrt{31}}{10} \vee x \geq \dfrac{-11 + \sqrt{31}}{10} \end{cases}$$

da cui la soluzione data dall'insieme $S = \left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$.