Esercitazione di Matematica
sul calcolo di espressioni letterali e potenza di un binomio

Parte I
Espressioni letterali

Semplificare le seguenti espressioni letterali ovvero eseguire le seguenti operazioni tra polinomi riducendo il risultato a polinomio in forma normale:

1. $(2x-5)^2+(x+2)(x-2)+(x-1)(3x+4)-(2x^2-5x-1)$;
2. $x^5-4x(x^4+4x+5)+(x^2+x+2)^2-x(x^3+x)+2$;
3. $(x+2y+z^2)(x+2y-z^2)+5(2xy+z^4-4)-(x^2+4y^2-2)$;
4. $(2-x)(4+2x+x^2)+2(x+2y)^3-12y(x^2+2xy)+4(y+3)+5x$;
5. $(16x^2-y^2)^2-(4x-y)^2(4x+y)^2$;
6. $(a-2)(a^2+2a+4)-3(a^3-8)+2a^3-16$
7. $\left(\frac{3}{2}+a\right)\left(\frac{3}{2}-a\right)+a(a+2)-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+a^2$;
8. $(x+2y-z)^2-(x+2y)^2+4z(y+1)+4yz$;
9. $(x+y)(x^2-xy+y^2)-x(x^2+y)+y(x+y^2)+4$
10. $(x-y+z^2+uv)^2-2(x-y)(z^2+uv+1)-uv(z^2+uv)-(11z^4-2)$.

Parte II
Potenza di binomio

Eseguire le seguenti potenze di binomio:

(I) $(a-2)^7$;

(II) $(x-y^2)^{10}$.

Soluzioni

In tutta la trattazione seguente va tenuto conto dei prodotti notevoli:

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ (differenza di due quadrati);
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (quadrato di binomio);
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (cubo di binomio);
- $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ (somma e differenza di due cubi)

valide qualsiasi espressione figuri al posto di a, b e del quadrato di polinomio dato dalla somma del quadrato di tutti i suoi termini e di tutti i possibili doppi prodotti presi una sola volta.
Ciò premesso, passiamo alla risoluzione degli esercizi proposti.

1. Risulta
   $(2x-5)^2 + (x+2)(x-2) + (x-1)(3x+4) - (2x^2-5x-1) =$
   $= \underbrace{(3x-5)^2}_{\text{quadrato di binomio}} + \underbrace{(x+2)(x-2)}_{\text{differenza di quadrati}} + (x-1)(3x+4) - (2x^2-5x-1) =$
   $= 4x^2 - 20x + 25 + x^2 - 4 + 3x^2 + 4x - 3x - 4 - 2x^2 + 5x + 1 = 6x^2 - 14x + 18$
   avendo proceduto a sommare i termini simili nello scrivere l'ultima uguaglianza ordinando il polinomio secondo le potenze decrescenti della lettera x.

2. Tenendo conto del fatto che la terza parentesi comporta un quadrato di trinomio (unico prodotto notevole figurante nell'espressione), si ha:
   $x^5 - 4x(x^4 + 4x + 5) + (x^2 + x + 2)^2 - x(x^3 + x) + 2 = x^5 - 4x^5 - 16x^2 - 20x +$
   $+ x^4 + x^2 + 4 + 2x^3 + 4x^2 + 4x - x^4 - x^2 + 2 = -3x^5 + 2x^3 - 12x^2 - 16x + 6$
   avendo proceduto a sommare i termini simili nello scrivere l'ultima uguaglianza ordinando il polinomio secondo le potenze decrescenti della lettera x.

3. Risulta
   $(x + 2y + z^2)(x + 2y - z^2) + 5(2xy + z^4 - 4) - (x^2 + 4y^2 - 2) =$
   $\underbrace{[(x+2y) + z^2][(x+2y) - z^2]}_{\text{differenza di due quadrati}} + 5(2xy + z^4 - 4) - (x^2 + 4y^2 - 2) =$
   $= \underbrace{(x+2y)^2}_{\text{quadrato di binomio}} - z^4 + 5(2xy + z^4 - 4) - (x^2 + 4y^2 - 2) =$
   $= x^2 + 4xy + 4y^2 - z^4 + 10xy - 4z^4 - 20 - x^2 - 4y^2 + 2 = 14xy - 5z^4 + 18$
   avendo proceduto a sommare i termini simili nello scrivere l'ultima uguaglianza.

4. Tenendo conto del fatto che, nell'espressione data, figurano la differenza di due cubi $(2-x)(4+2x+x^2) = 2^3 - x^3$ ed il cubo di binomio $(x+2y)^3 = x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$, si ha:

   $(2-x)(4+2x+x^2)+2(x+2y)^3-12y(x^2+2xy)+4(y+3)+5x =$
   $= 8-x^3+2(x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3)-12x^2y-24xy^2+4y+12+5x =$
   $= 8-x^3+2x^3+12x^2y+24xy^2+16y^3-12x^2y-24xy^2+4y+12+5x =$
   $= x^3+16y^3+5x+4y+20$

   avendo proceduto a ridurre a forma normale il polinomio costituente il risultato dell'espressione calcolata.

5. Tenendo conto della proprietà delle potenze che vuole $a^nb^n = (ab)^n$, si ha:

   $(16x^2-y^2)^2-(4x-y)^2(4x+y)^2 = (4x^2-y^2)^2-[\underbrace{(4x-y)(4x+y)}_{\text{differenza di due quadrati}}]^2 =$
   $=(16x^2-y^2)^2-(16x^2-y^2)^2 = 0.$

   Si noti che allo stesso risultato si perviene, in modo più laborioso, sviluppando dapprima i quadrati e poi eseguendo le altre operazioni richieste.

6. Tenendo conto del fatto che il primo prodotto conduce ad una differenza di due cubi, si ha:

   $(a-2)(a^2+2a+4)-3(a^3-8)+2a^3-16 = a^3-8-3a^3+24+2a^3-16 = 0$

   dove, nello scrivere l'ultima uguaglianza, si è tenuto conto del fatto che è nulla la somma algebrica di tutti i termini simili sicché nulla è la somma algebrica totale.

7. $\underbrace{\left(\frac{3}{2}+a\right)\left(\frac{3}{2}-a\right)}_{\text{differenza di due quadrati}} +a(a+2)- \underbrace{\left(a-\frac{3}{2}\right)^2}_{\text{quadrato di un binomio}} +a^2 = \frac{9}{4}-\underline{a^2}+\underline{a^2}+$
   $+2a-\left(a^2-3a+\frac{9}{4}\right)+a^2 = \frac{9}{4}+2a-a^2+3a-\frac{9}{4}+a^2 = 5a$

   avendo proceduto alla riduzione dei termini simili.

8. Sviluppando i due quadrati che compaiono nell'espressione e svolgendo le altre operazioni, si ha:

   $(x+2y-z)^2-(x+2y)^2+4z(y+1)+4yz = x^2+4y^2+z^2+4xy+$
   $-2xz-4yz-(x^2+4xy+4y^2)+4yz+4z+4yz = x^2+4y^2+z^2+4xy+$
   $-2xz-4yz-x^2-4xy-y^2+4yz+4z+4yz = 3y^2+z^2-2xz+4yz$

   avendo, al solito, ridotto i termini simili.

9. $\underbrace{(x+y)(x^2-xy+y^2)}_{\text{somma di due cubi}} -x(x^2+y)+y(x+y^2)+4 = x^3+y^3-x^3-xy+$
   $+xy+y^3+4 = 2y^3+4.$

10. Tenendo conto del fatto che, l'unico prodotto notevole nell'espressione, è il quadrato di quadrinomio che s'incontra all'inizio della stessa ed eseguendo le altre operzioni avendo l'accortezza di sommare i termini simili, si ha:

$$(x-y+z^2+uv)^2-2(x-y)(z^2+uv+1)-uv(z^2+uv)-(11z^4-2)=$$
$$=x^2+y^2+\underbrace{z^4}+\underline{(uv)^2}-(2x-2y)(z^2+uv+1)-uvz^2-\underline{(uv)^2}-\underbrace{11z^4}+2=$$
$$=x^2+y^2-10z^4-(2xz^2+2uvx+2x-2yz^2-2uvy-2y)-uvz^2+2=$$
$$=x^2+y^2-10z^4-2xz^2-2uvx-2x+2yz^2+2uvy+2y-uvz^2+2.$$

Passiamo alla seconda parte ovvero allo sviluppo delle potenze di binomio richieste.
Premettiamo il triangolo di tartaglia fino al calcolo dei coefficienti della decima potenza in quanto solo settima e decima sono le potenze interessate.

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1\\
1\quad 9\quad 36\quad 84\quad 126\quad 126\quad 84\quad 36\quad 9\quad 1\\
1\quad 10\quad 45\quad 120\quad 210\quad 252\quad 210\quad 120\quad 45\quad 10\quad 1
\end{array}$$

dove i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^7$ sono contenuti nella ottava riga mentre quelli dello sviluppo di $(a+b)^{10}$ nell'ultima riga.
Ciò premesso, passiamo alla risoluzione degli esercizi proposti.

(I) Risulta

$$(A+B)^7=A^7+7A^6B+21A^5B^2+35A^4B^3+35A^3B^4+21A^2B^5+7AB^6+B^7$$

da cui, ponendo $A=a$ e $B=-2$ e svolgendo tutti i calcoli, si ha lo sviluppo richiesto:

$$(a-2)^7=a^7-14a^6+84a^6-280a^4+560a^3-672a^2+448a-128.$$

(II) Risulta

$$(A+B)^{10}=A^{10}+10A^9B+45A^8B^2+120A^7B^3+210A^6B^4+252A^5B^5+$$
$$+210A^4B^6+120A^3B^7+45A^2B^8+10AB^9+B^{10}$$

da cui, ponendo $A=x$ e $B=-y^2$ e svolgendo tutti i calcoli, si ha lo sviluppo richiesto:

$$(x-y^2)^{10}=x^{10}-10x^9y^2+45x^8y^4-120x^7y^6+210x^6y^8-252x^5y^{10}+$$
$$+210x^4y^{12}-120x^3y^{14}+45x^2y^{16}-10xy^{18}+y^{20}.$$