Esercitazione di Matematica sui radicali

Esercizio 1. **[ESPRESSIONI CONTENENTI RADICALI]**
Calcolare le seguenti espressioni:

(a) $(\sqrt{5}-5)^2+\sqrt{5}(\sqrt{2}-4\sqrt{5})$;

(b) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})+4(\sqrt{11}-1)+\sqrt{11}$.

Esercizio 2. **[MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE TRA RADICALI]**
Eseguire le seguenti moltiplicazioni e divisioni nell'ipotesi che le lettere possano assumere solo valori per cui tutte le radici sono definite:

(a) $\sqrt{a^4x^6y}\cdot\sqrt[5]{2x^7y^6z^2}\cdot\sqrt[15]{x^4yz^2}\cdot\sqrt[6]{x}$;

(b) $\sqrt[20]{a^{15}b^5cd}\cdot\sqrt[10]{a^4b^6c^6d^5}:\sqrt[5]{a^3bcd^5}$;

(c) $\sqrt[16]{\dfrac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}}\cdot\sqrt[4]{(a^2+b^2)(a+b)}:\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}}$.

Esercizio 3. **[TRASPORTO SOTTO RADICE]**
Eseguire il trasporto sotto radice nei casi seguenti in cui si suppone non negativo il segno delle lettere:

(a) $\dfrac{x^2y}{2}\sqrt[15]{a}$;

(b) $-5\sqrt[3]{2}$.

Esercizio 4. **[TRASPORTO FUORI RADICE]**
Trasportare, ciò che è possibile, fuori dalle seguenti radici supponendo le potenze sotto radice ottenute da basi il cui segno delle lettere è a fianco indicato:

(a) $\sqrt[4]{81a^{15}b^{70}c^{16}d^{24}}$ (lettere non negative);

(b) $\sqrt{204}$;

(c) $\sqrt{12x^{12}y^2z^6}$ (lettere di segno qualsiasi).

Esercizio 5. **[RAZIONALIZZAZIONE]**
Razionalizzare le seguenti frazioni:

(a) $\dfrac{20}{\sqrt{10}}$;

(b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{21}}$;

(c) $\dfrac{42}{\sqrt{40}-\sqrt{2}}$;

(d) $\dfrac{6a}{\sqrt{2a}+\sqrt{5a}}$ $(a>0)$;

(e) $\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$ $(a>0)$.

Risoluzione degli esercizi

Esercizio 1.
Nei calcoli seguenti viene tenuto conto del fatto che $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ e dei prodotti notevoli e delle regole del calcolo letterale applicabili anche ad espressioni radicali.

(a) $(\sqrt{5}-5)^2+\sqrt{5}(\sqrt{2}-4\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2-10\sqrt{5}+25+\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}-4(\sqrt{5})^2 =$
$= 5-10\sqrt{5}+25+\sqrt{10}-4\cdot 5 = 5-10\sqrt{5}+25+\sqrt{10}-20 =$
$10-10\sqrt{5}+\sqrt{10}.$

(b) $(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})+4(\sqrt{11}-1)+\sqrt{11} = 7-3-4\sqrt{11}+4+\sqrt{11} = 5\sqrt{11}.$

Esercizio 2.
La regola da applicare di seguito è quella che vuole il prodotto o il quoziente di radicali dello stesso indice uguale ad un radicale di stesso indice avente come argomento il prodotto o il quoziente degl argomenti.
Se i radicali non hanno stesso indice, essi vanno riportati allo stesso indice (mcm tra gli indici) per poi prcedere come appena richiamato.

(a) $\sqrt{a^4x^6y}\cdot\sqrt[5]{2x^7y^6z^2}\cdot\sqrt[15]{x^4yz^2}\cdot\sqrt[6]{x} = \sqrt[30]{(a^4x^6y)^{15}(2x^7y^6z^2)^6(x^4yz^2)^2)x^5} =$
$= \sqrt[30]{a^{60}x^{90}y^{15}\cdot 2^6x^{42}y^{36}z^{12}x^8y^2z^4x^5} = \sqrt[30]{64x^{145}y^{53}z^{16}}\ .$

(b) $\sqrt[20]{a^{15}b^5cd}\cdot\sqrt[10]{a^4b^6c^6d^5} : \sqrt[5]{a^3bcd^5} = \sqrt[20]{a^{15}b^5cd(a^4b^6c^6d^5)^2 : (a^3bcd^5)^4} =$
$= \sqrt[20]{a^{15}b^5cda^8b^{12}c^{12}d^{10} : a^{12}b^4c^4d^{20}} = \sqrt[20]{a^{15+8-12}b^{5+12-4}c^{1+12-4}d^{1+10-20}} =$
$= \sqrt[20]{a^{11}b^{13}c^9d^{-9}}\ .$

(c) $\sqrt[16]{\dfrac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}}\cdot\sqrt[4]{(a^2+b^2)(a+b)} : \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a+b}} =$

$$= \sqrt[16]{\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\cdot(a^2+b^2)^4(a+b)^4 : \frac{(a^2+b^2)^8}{(a+b)^8}} =$$

$$= \sqrt[16]{\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\cdot(a^2+b^2)^4(a+b)^4\cdot\frac{(a+b)^8}{(a^2+b^2)^8}} = \sqrt[16]{\frac{(a+b)^{10}}{(a^2+b^2)^3}}\ .$$

Esercizio 3.

(a) $\dfrac{x^2y}{2}\sqrt[15]{a} = \sqrt[15]{a\cdot\left(\dfrac{x^2y}{2}\right)^{15}}\ .$

Si noti che, nel caso in cui le lettere assumessero segno qualunque, per $x^2y \geq 0$ (cioè per $y \geq 0$) si avrebbe la stessa situazione mentre, per $x^2y < 0$ (vera se $y < 0$) bisognerebbe tenere un segno meno fuori radice.

(b) $-5\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{2\cdot 5^3} = \sqrt[3]{250}\ .$

Esercizio 4.
Premettiamo che, nel caso in cui sotto radice figurano lettere di segno qualsiasi, il trasporto fuori radice di potenze dispari va fatto prendendo le basi in valore assoluto onde estrarre la radice aritmetica.

Ricordiamo, poi, che il trasporto fuori può esser fatto per ogni fattore avente l'esponente maggiore o uguale all'indice della radice avendosi, in simboli, $\sqrt[n]{\alpha^m} = \alpha^q \sqrt[n]{\alpha^r}$ dove q ed r sono, rispettivamente, il quoziente ed il resto della divisione $m : n$.
Ciò premesso, limitatamente alla lettera (a), svolgiamo ogni passaggio come appena descritto.

(a) Scomponendo il coeffiiente si ha che $81 = 3^4$ sicché ogni fattore è trasportabile fuori radice per quanto richiamato in precedenza e si ha:
$\sqrt[4]{81a^{15}b^{70}c^{16}d^{24}} = \sqrt[4]{3^4a^{15}b^{70}c^{16}d^{24}} = 3^1a^3b^{17}c^4d^6\sqrt[4]{3^0a^3b^2c^0d^0} = 3a^3b^{17}c^4d^6\sqrt[4]{a^3b^2}$.

(b) Poiché $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$ (scomposizione in fattori), si ha:
$\sqrt{204} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 17} = 2\sqrt{3 \cdot 17} = 2\sqrt{51}$.

(c) Procedendo come in precedenza ancora tenendo conto delle premesse fatte, si ha:
$\sqrt{12x^{12}y^2z^6} = \sqrt{2^2 \cdot 3x^{12}y^2z^6} = 2x^6|y||z|^3\sqrt{3} = 2x^6|yz^3|\sqrt{3}$.

Esercizio 5.
Prima di procedere, ricordiamo i due procedimenti che permettono la razionalizzazione come qui richiesto:

- $\dfrac{x}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{x}{\sqrt[n]{a}} \cdot \dfrac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}} = \dfrac{x\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}} = \dfrac{x\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}$;
- $\dfrac{x}{\alpha \pm \beta} = \dfrac{x}{\alpha \pm \beta} \cdot \dfrac{\alpha \mp \beta}{\alpha \mp \beta} = \dfrac{x(\alpha \mp \beta)}{\alpha^2 - \beta^2}$, con $\alpha = \sqrt{a}$ o $\beta = \sqrt{b}$.

La prima regola si applica alle lettere (a), (b) mentre la seconda alle rimanenti.

(a) $\dfrac{20}{\sqrt{10}} = \dfrac{20}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \dfrac{20\sqrt{10}}{(\sqrt{10})^2} = \dfrac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$.

(b) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{21}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{21}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{21^2}}{\sqrt[3]{21^2}} = \dfrac{3\sqrt[3]{21^2}}{\sqrt[3]{21^3}} = \dfrac{3\sqrt[3]{441}}{21} = \dfrac{\sqrt[3]{441}}{7}$.

(c) $\dfrac{42}{\sqrt{40} - \sqrt{2}} = \dfrac{42}{\sqrt{40} - \sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{40} + \sqrt{2}}{\sqrt{40} + \sqrt{2}} = \dfrac{42(\sqrt{40} + \sqrt{2})}{(\sqrt{40})^2 - (\sqrt{2})^2} = \dfrac{42(\sqrt{40} + \sqrt{2})}{40 - 2} =$
$= \dfrac{42(\sqrt{40} + \sqrt{2})}{38} = \dfrac{21(\sqrt{40} + \sqrt{2})}{19}$.

(d) $\dfrac{6a}{\sqrt{2a} + \sqrt{5a}} = \dfrac{6a}{\sqrt{2a} + \sqrt{5a}} \cdot \dfrac{\sqrt{2a} - \sqrt{5a}}{\sqrt{2a} - \sqrt{5a}} = \dfrac{6a(\sqrt{2a} - \sqrt{5a})}{(\sqrt{2a})^2 - (\sqrt{5a})^2} = \dfrac{6a(\sqrt{2a} - \sqrt{5a})}{2a - 5a} =$
$= \dfrac{6a(\sqrt{2a} - \sqrt{5a})}{-3a} = -2(\sqrt{2a} - \sqrt{5a})$.

(e) $\dfrac{a - b^2}{\sqrt{a} + b} = \dfrac{a - b^2}{\sqrt{a} + b} \cdot \dfrac{\sqrt{a} - b}{\sqrt{a} - b} = \dfrac{(a - b^2)(\sqrt{a} - b)}{(\sqrt{a})^2 - b^2} = \dfrac{(a - b^2)(\sqrt{a} - b)}{a - b^2} =$
$= \sqrt{a} - b$.