FORMULARIO: tavola degli integrali indefiniti

Definizione

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Proprietà dell'integrale indefinito

$$\int k\,f(x)dx = k\int f(x)dx$$

$$\int [f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$$

Integrali indefiniti fondamentali

$$\int f'(x)dx = f(x)+c$$

$$\int a\,dx = ax+c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad \text{con } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x|+c$$

$$\int \mathrm{sen}x\,dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\,dx = \mathrm{sen}x + c$$

$$\int (1+tg^2 x)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + c$$

$$\int (1+ctg^2 x)dx = \int \frac{1}{sen^2 x}dx = -ctgx + c$$

$$\int Sh\,x\,dx = Ch\,x + c$$

$$\int Ch\,x\,dx = Sh\,x + c$$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$$

Integrali notevoli

$$\int \frac{1}{senx}dx = \log\left|tg\frac{x}{2}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x}dx = \log\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} arcsen\,x + c \\ -\arccos x + c \end{cases}$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \arccos x + c \\ -arcsenx + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = arctg\,x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \begin{cases} arcsSh\,x + c \\ \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right) + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log_e a} + c$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 arcsen\,\frac{x}{a} + x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \right) + c$$

$$\int sen^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x - senx\cos x\right) + c$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + senx\cos x\right) + c$$

$$\int \frac{1}{Ch^2\,x}\,dx = \int \left(1 - Th^2 x\right) dx + c = Th\;x + c$$

Integrali indefiniti riconducibili a quelli immediati:

$$\int f^n(x) f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log\left|f(x)\right| + c$$

$$\int f'(x)\cos f(x)\,dx = sen\,f(x) + c$$

$$\int f'(x)\,sen\,f(x)\,dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log_e a} + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\,dx = \begin{cases} arcsen\,f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$$

$$\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx = arctg\,f(x) + c$$

Tecniche di integrazione:

Integrazione per sostituzione

Per il calcolo di integrali del tipo $\int f(x)dx$, talvolta può essere vantaggioso sostituire alla variabile d’integrazione *x* una funzione di un’altra variabile *t*, purchè tale funzione sia derivabile e invertibile.

Ponendo $x = g(t)$, da cui deriva $dx = g'(t)dt$, si ha che:

$$\int f(x)dx = \int f\left[g(t)\right] \cdot g'(t)\,dt$$

Integrazione per parti

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Si integrano per parti funzioni del tipo $P(x)\cdot e^x$, $P(x)\cdot \sin x$, $P(x)\cdot \cos x$, $e^{\alpha x}\cdot \sin \beta x$, $e^{\alpha x}\cdot \cos \beta x$, dove $P(x)$ è un polinomio.

Integrali generalizzati più comuni

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$ (integrale di Gauss) o $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$$ (Integrale di Eulero)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \pi$$

$$\int_0^{+\infty} x^{z-1}\, e^{-x}\, dx = \Gamma(z)$$ (Γ denota la funzione Gamma)

$$\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\, dt = \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$ (integrale ellittico), $B\,(p,q)$ denota la funzione Beta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))\, dx = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$$